Revista Boliviana de Matemática 2(2): 117–146 (2023)
ISSN: 2791-3260 Versión impresa.
ISSN: 2957-8604 Versión en línea.
Instituto de Investigación Matemática
Universidad Mayor de San Andrés

Condiciones Suficientes para Problemas de Control Óptimo con Tiempos Finales Libres

Fabiola Roxana Villanueva[1], Valeriano Antunes de Oliveira[2]

[1] *Carrera de Matemática, Universidad Mayor de San Andrés, Bolivia*
[2] *Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, SP, Brasil*

Resumen

En este trabajo estudiamos las condiciones suficientes de optimalidad para problemas de control óptimo con tiempos finales libres. Presentamos una definición de convexidad generalizada llamada PM–pseudoinvexidad libre. Mostramos que bajo algunas condiciones, si el problema es PM–pseudoinvexo libre, entonces todo PM–proceso normal es un proceso óptimo y, recíprocamente, que bajo algunas condiciones, si el problema es tal que todo PM–proceso es un proceso óptimo, entonces el problema es PM–pseudoinvexo libre. Finalmente, mostramos algunos ejemplos.

Palabras Clave: Control Óptimo con Tiempos Finales Libres, Principio del Máximo, Condiciones Suficientes, Convexidad Generalizada.

1. Introducción

Una variedad de problemas que ocurren, por ejemplo, en la economía ([16]), en el crecimiento de plantas ([11]), en la medicina ([21]), en el descenso de una nave espacial en la Luna ([2]), etc., puede modelarse como problemas de control óptimo. La gran cantidad de aplicaciones de la vida real en los que están involucrados los sistemas de control hace que esta teoría sea una herramienta realmente útil. Una estrategia para el control de un satélite en órbita es el control bang–bang, basada en la eliminación del desvío de la orientación del satélite de su valor nominal en tiempo libre. Los problemas de control ópimo asociados con evadir o perseguir, escapar o golpear en el menor tiempo o lo más rápido posible son generalmente problemas de tiempo libre. Por lo tanto, encontrar condiciones de optimalidad para problemas de control con tiempos finales libres es muy importante.

En las condiciones suficientes de optimalidad, que es el interés de este trabajo, están las que involucran hipótesis de convexidad ([4]), convexidad generalizada ([19]), condiciones de segundo orden ([1], [14], [12] y [13]) y el método de la función de verificación a través de la Teoría de Hamilton–Jacobi–Bellman ([24]). En este trabajo, consideraremos hipótesis de convexidad generalizada.

Las necesidades de la teoría de la optimización han llevado a desarrollar una importante clase de funciones conocidas como funciones invexas. En la optimización con restricciones de desigualdad, las condiciones necesarias clásicas de Kuhn–Tucker también son suficientes para la optimalidad si, las funciones involucradas del problema son convexas o satisfacen ciertas propiedades de convexidad generalizada, como la pseudoconvexidad o la cuasi–convexidad estudiadas en [19]. El concepto de invexidad (traducido del inglés "invex", de "invariant convex") generaliza la noción de convexidad y es interesante desde el punto de vista de la optimización, dado que brinda un panorama más vasto en el que las condiciones de Kuhn–Tucker son suficientes para la optimalidad. En 1981, Hanson ([10]) fue el primero en definir el concepto de invexidad cuando consideró una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para la cual, dados x, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ existe $\eta(x, \bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x}) \cdot \eta(x, \bar{x}). \tag{1}$$

La utilidad de las funciones que satisfacen (1) se aplicaron rápidamente cuando Hanson mostró que si la función objetivo y las funciones que definen las restricciones de un problema de programación no lineal satisfacen (1) para la misma η, entonces la dualidad débil y las condiciones de suficiencia de Kuhn–Tucker aún se satisfacen, pero las aplicaciones para la optimización realmente avanzaron cuando se mostró que las funciones invexas tenían la siguiente propiedad: la función f es invexa si y solo si todo punto estacionario es un mínimo global. Esta propiedad fue mostrada por primera vez por Craven y Glover ([5]) en un entorno de dimensión infinita (para una prueba de dimensión finita, ver Ben-Israel y Mond ([3]).

En [10], Hanson introdujo una generalización de convexidad para problemas de optimización con restricciones:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } f(x) \text{ para } x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \\ \text{sujeto a } \quad g(x) \leq 0, \end{cases} \tag{2}$$

donde $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ son funciones diferenciables en un abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$. La convexidad de (2) se caracteriza por las desigualdades

$$x, \bar{x} \in \mathcal{D} \Rightarrow \begin{cases} f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0, \\ g(x) - g(\bar{x}) - g'(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0. \end{cases}$$

Hanson se dio cuenta de que la forma funcional del factor $x - \bar{x}$ no juega un papel importante en el establecimiento de las siguientes dos propiedades conocidas de los problemas convexos:

(A) Todo punto admisible de Kuhn–Tucker es un mínimo global.
(B) La dualidad débil se satisface para el problema (2) y su dual de tipo Wolfe formal.

Por lo tanto, Hanson consideró problemas del tipo (2) para los cuales existe una función $\eta : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$x, \bar{x} \in \mathcal{D} \Rightarrow \begin{cases} f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \geq 0, \\ g(x) - g(\bar{x}) - g'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

y señaló que estos problemas también tienen las propiedades (A) y (B).

Martin en [17] mostró que las relajaciones elementales de las condiciones que definen la invexidad conducen a nociones de invexidad modificadas que son tanto necesarias como suficientes para la dualidad débil y la suficiencia de las condiciones de Kuhn–Tucker. La noción de invexidad más débil que también es una condición suficiente para la propiedad (A) se llama invexidad de Kuhn–Tucker, es decir, el problema (3) se denominó Kuhn–Tucker invexo (KT–invexo) si existe una función $\eta : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{cases} x, \bar{x} \in \mathcal{D} \\ g(x) \leq 0 \\ g(\bar{x}) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \geq 0 \\ \text{para } i \in \{1, 2, \ldots\ldots, m\} \text{ si } g_i(\bar{x}) = 0 \\ \text{entonces } - g_i'(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \geq 0, \end{cases}$$

para más detalles sobre la KT–invexidad, ver [17]. Traemos a la teoría de control óptimo con tiempos libres la noción de PM–pseudoinvexidad (introducida en [6] y [7] para problemas con tiempos fijos). La PM–pseudoinvexidad libre es, de hecho, una generalización de la KT–invexidad para problemas de control óptimo (por lo que es una condición suficiente de optimalidad) que también ha sido estudiada en [6], [8] y [9]. Podemos considerar problemas de control con restricciones fijos en los puntos finales y podemos asumir diferenciabilidad tanto para el funcional objetivo como para las funciones que definen la dinámica del sistema, con respecto al estado y al control, pero esto no siempre sucede en la vida real. Así que consideraremos problemas de control con restricciones libres en los puntos finales, continuidad local de Lipschitz con respecto al estado y medibilidad con respecto al control.

En [18] se estudió una condición suficiente para la optimalidad global en términos de desigualdades entre las funciones involucradas en la definición del problema tratado. Esta condición es simplemente una extensión de la condición suficiente obtenida por Leitmann y Stalford (ver [15]) y puede resolver tanto problemas con restricciones en el control y/o en el estado como también problemas con tiempo final libre.

Las condiciones suficientes directas (condiciones relacionadas con la teoría de puntos sillas, con la teoría de los procesos óptimos de Pontryagin y, en cierta medida, con el cálculo variacional) para asegurar que una solución a un problema de control óptimo de tiempo continuo es realmente una solución son el objeto de estudio del trabajo de Peterson y Zalkind (ver [20]), quienes encuentran que cuatro importantes condiciones suficientes directas son de alcance variable y que una de estas condiciones generaliza a las otras.

Ahora en [24] se tiene las condiciones necesarias para problemas de control con tiempos finales libres y en este trabajo el objetivo es presentar las condiciones suficientes, que sean más útiles en el sentido de que estén más relacionadas con los métodos de obtener soluciones reales y en el sentido de que contribuyen a decidir la optimización en clases más amplias de problemas libres. Para esto, no basta estudiar el Principio del Máximo con tiempos finales libres, sino también precisamos el estudio de una nueva convexidad: una invexidad generalizada, que denominaremos PM–pseudoinvexidad libre. Debemos mencionar que estas condiciones suficientes para problemas de control con tiempos finales libres ya comenzaron a ser estudiadas, pero de forma muy superficial, sin detalles, sin profundidad ni ejemplos en [23], lo cual ahora es logrado en este trabajo. También, debemos enfatizar que este concepto de PM–pseudoinvexidad libre, es una generalización de la noción de convexidad, puesto que proporciona una visión más amplia en la que las condiciones del Principio del Máximo en la formulación del problema de control óptimo con tiempos finales libres son suficientes para la optimalidad.

Seierstad (ver [22]) proporciona una condición suficiente para la optimalidad de un control en problemas de control estándares con tiempo final libre y, las herramientas que el autor utiliza son propiedades de superderivadas del valor óptimo del criterio como una función de tiempo final y de punto final. Sin embargo, las condiciones suficientes de Seierstad son obtenidas sólo si las superderivadas tienen signos adecuados. Además, se puede verificar que si se cumplen las condiciones de Seierstad, entonces todo $PM-$proceso es un proceso óptimo, lo cual implica que el problema es $PM-$pseudoinvexo libre (ver más abajo el Teorema 3.2). Lo anterior muestra que las condiciones de este trabajo son más generales que las condiciones de Seierstad.

El presente trabajo comprende cuatro secciones más. A continuación establecemos algunas notaciones, definiciones, hipótesis y resultados a ser utilizados a lo largo del trabajo. En la Sección 3 se define un nuevo concepto, la PM–pseudoinvexidad libre, y se obtiene algunas implicaciones importantes. En la Sección 4 se ilustran algunos ejemplos. Finalmente, en la Sección 5 se mencionan algunas consideraciones finales.

2. Preliminares

En la próxima sección, proponemos una nueva versión de PM–pseudoinvexidad. Esta definición requiere hipótesis de diferenciabilidad para las funciones $g(s,\cdot,t,\cdot)$ y $f(t,\cdot,u)$.

Consideremos el problema de control óptimo de tipo Mayer con tiempos finales libres:

$$(TL)\begin{cases}\text{Minimizar } g(S,x(S),T,x(T))\\ \text{sujeto a intervalos } [S,T],\ \text{arcos } x\in W^{1,1}([S,T];\mathbb{R}^n) \text{ y funciones medibles}\\ u:[S,T]\to\mathbb{R}^m \text{ satisfaciendo}\\ \dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)) \text{ para c.t. } t\in[S,T],\\ u(t)\in U(t) \text{ para c.t. } t\in[S,T] \text{ y},\\ (S,x(S),T,x(T))\in C,\end{cases}$$

donde $g:\mathbb{R}^{1+n+1+n}\to\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ son funciones dadas, $U:\mathbb{R}\rightsquigarrow\mathbb{R}^m$ es una multifunción no-vacia, $C\subset\mathbb{R}^{1+n+1+n}$ es un conjunto cerrado, los tiempos S, T están libres, c.t. es una abreviación de casi todo (en el sentido de la medida de Lebesque) y, el conjunto de todas las funciones absolutamente continuas [1] $f : [S,T] \to \mathbb{R}^k$ es denotado por $W^{1,1}([S,T];\mathbb{R}^k)$.

Definición 2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Denotemos*

$$I = \{t \,|\, (t,x) \in \Omega \text{ para algún } x \in \mathbb{R}^n\} \quad y \quad \Omega_t = \{x \,|\, (t,x) \in \Omega\}.$$

Decimos que Ω es un tubo cuando I es un intervalo y existen una función continua $w(t)$ y una función continua positiva $\epsilon \in I$ tales que

$$\Omega_t = w(t) + \epsilon(t)^2\mathbb{B} \text{ para } t \in I.$$

Si una función x definida en I dada es tal que $(t,x(t)) \in \Omega$ para cada $t \in I$, decimos que $x \in \Omega$.

Definición 2.2. 1. *Un proceso admisible es una terna $([S,T],x,u)$ donde $[S,T]$ es un intervalo, x (la trayectoria del estado) es un elemento en $W^{1,1}([S,T];\mathbb{R}^n)$ y, u (la función de control) es una función medible $u : [S,T] \to \mathbb{R}^m$ satisfaciendo, para c.t. $t \in [S,T]$,*

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad u(t) \in U(t) \quad y \quad (S,x(S),T,x(T)) \in C.$$

2. *Un proceso $([\bar{S},\bar{T}],\bar{x},\bar{u})$ admisible es denominado un proceso óptimo si existe $\delta' > 0$ tal que*

$$g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) \leq g(S,x(S),T,x(T))$$

para todo proceso admisible $([S,T],x,u)$.

Notación. Denote por $\mathcal{H} : [S,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ la función Hamiltoniana no–maximizada para (TL), definida por

$$\mathcal{H}(t,x,p,u) = p \cdot f(t,x,u).$$

Para este problema (TL), vamos asumir válidas las siguientes hipótesis. Sea $([\bar{S},\bar{T}],\bar{x},\bar{u})$ un proceso de referencia arbitrario.

(H1) g es continuamente diferenciable.

(H2) La función $f(t,x,\cdot)$ es $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ medible, para cada $(t,x) \in [\bar{S},\bar{T}] \times \mathbb{R}^n$ y existe una función $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ medible $k_f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que para cada $u \in U$, la función $f(\cdot,\cdot,u)$ es continuamente diferenciable en Ω y Lipschitz continua, de rango $k_f(u)$ y, $t \to k_f(\bar{u}(t))$ es integrable.

---

[1] Una función $f : [S,T] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si, se satisface una de las siguientes propiedades:

(A) $\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0$ tal que para cada colección $\{[S_i,T_i]\}$ de sub–intervalos disjuntos de $[S,T]$ se tiene que

$$\sum_i (T_i - S_i) < \delta \Rightarrow \sum_i |f(T_i) - f(S_i)| < \epsilon.$$

(B) $\exists\, v \in L^1(S,T)$ (el espacio de las funciones integrables definidas en $[S,T]$) tal que

$$f(t) = f(S) + \int_S^T v(\tau)d\tau, \; t \in [S,T].$$

De ahí $\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}f(t) = v(t)$ para c.t. $t \in [S,T]$.

[2] $\mathbb{B}$ denota la bola abierta unitaria centrada en el origen en $\mathbb{R}^n$.

(H3) El gráfico de $U : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$, denotado como Gr U,

$$\text{Gr } U = \{(t, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mid \gamma \in U(t)\}$$

es un conjunto $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ medible.

De este modo, según el Principio del Máximo con tiempos finales libres, ver [24], tenemos:

Teorema 2.1. ***(El Principio del Máximo para** (TL)**)*** *Sea* $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ *un proceso óptimo para* (TL)*. Entonces existen* $p \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R}^n), r \in W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R})$ *y, un escalar* λ *(igual a* 0 *o* 1*) tales que*

(4) $(p, \lambda) \neq (0, 0)$;

(5) $(\dot{r}(t), -\dot{p}(t)) \in \nabla_{(t,x)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))$ *para c.t.* $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$;

(6) $(-r(\bar{S}), p(\bar{S}), r(\bar{T}), -p(\bar{T})) \in \lambda \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$;

(7) $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max\limits_{u \in U} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u)$ *para c.t.* $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$;

(8) $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = r(t)$ *para c.t.* $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Definición 2.3.
1. *Cuando existen* p*,* r *y* λ *satisfaciendo (4)–(8) decimos que la terna* $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ *es un PM–proceso de* (TL)*.*
2. *Si* $\lambda = 1$*, decimos que* $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ *es un PM–proceso normal y* (TL) *es denominado normal en* $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$*.*
3. *Decimos que* (TL) *es normal si es normal en cualquier PM–proceso* $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ *y que* (TL) *es anormal, en caso contrario.*

3. Condiciones suficientes de optimalidad para problemas de control óptimo con tiempos finales libres

En esta sección, definiremos el concepto de la PM–pseudoinvexidad libre y, mostraremos que este concepto es una condición de optimalidad suficiente. Los resultados serán establecidos haciendo uso de una hipótesis de diferenciabilidad de las funciones involucradas con respecto a la variable de estado (no necesariamente con respecto a la variable de control). Para los problemas PM–pseudoinvexos libres todos los procesos normales que satisfacen el Teorema 2.1 (los PM–procesos normales) son procesos óptimos. Utilizando un lema (Lema 3.1 en esta sección), mostraremos la recíproca: Los problemas tales que todos los PM–procesos son óptimos, son, necesariamente, problemas PM–pseudoinvexos libres.

Definición 3.1. *Dado* $(t, x, u) \in [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *y* $\alpha \in (0, 1)$ *definimos el operador diferencia* $\Delta_\alpha f(t, x, u) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *como*

$$\Delta_\alpha f(t, x, u)(\xi) := \frac{f(t, x, u + \alpha\xi) - f(t, x, u)}{\alpha}.$$

Definición 3.2. *Decimos que* (TL) *es PM–pseudoinvexo libre si para cada par de procesos admisibles* $([S, T], x, u)$*,* $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ *de* (TL) *tales que*

$$g(S, x(S), T, x(T)) < g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$$

existen

$$\eta(t) := \eta(t, [S,T], x(t), u(t), [\bar{S},\bar{T}], \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

y

$$\xi(t) := \xi(t, [S,T], x(t), u(t), [\bar{S},\bar{T}], \bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$

donde $\eta := (\eta_1, \eta_2) : [\bar{S},\bar{T}] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *y* $\xi := (\xi_1, \xi_2) : [\bar{S},\bar{T}] \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$*, satisfaciendo*

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1(t) & = \xi_2(t), \\ \dot{\eta}_2(t) & = f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_1(t) + f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_2(t) \\ & \quad +\Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t)) + \xi_2(t) f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) \end{cases} \tag{9}$$

para c.t. $t \in [\bar{S},\bar{T}]$*,*

$$(\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \in T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \tag{10}$$

$$(\bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t), 1 + \alpha\xi_2(t)) \in U(t) \times [0.5, 1.5] \ \textit{para c.t. } t \in [\bar{S},\bar{T}], \tag{11}$$

y

$$\nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) < 0, \tag{12}$$

para todo $\alpha \in (0, 1)$*.*

Observación 3.1. *En la definición anterior,* T_C *denota el cono tangente de Clarke al conjunto* C *en el punto* $(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$*, ver* [24].

Teorema 3.1. *Si* (TL) *es PM–pseudoinvexo libre, entonces todo PM–proceso normal es un proceso óptimo.*

Demostración. Sea $([\bar{S},\bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ un PM–proceso normal de (TL) y procedamos por contradicción. Asumamos que él no es un proceso óptimo, es decir, supongamos que existe un proceso admisible $([S,T], x, u)$ tal que $g(S, x(S), T, x(T)) < g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$. Como $([\bar{S},\bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ es un PM–proceso normal, existen funciones absolutamente continuas $p : [\bar{S},\bar{T}] \to \mathbb{R}^n$ y $r : [\bar{S},\bar{T}] \to \mathbb{R}$ y un escalar λ igual a 1 satisfaciendo $(4) - (8)$ y, si hacemos el siguiente cambio de variable $\chi(t) = -r(t),\ t \in [\bar{S},\bar{T}]$, tenemos que:

$$(p, 1) \neq (0, 0); \tag{13}$$

$$(-\dot{\chi}(t), -\dot{p}(t)) \in \nabla_{(t,x)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \text{ para c.t. } t \in [\bar{S},\bar{T}]; \tag{14}$$

$$(\chi(\bar{S}), p(\bar{S}), -\chi(\bar{T}), -p(\bar{T})) \in \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})); \tag{15}$$

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u) \text{ para c.t. } t \in [\bar{S},\bar{T}]; \tag{16}$$

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = -\chi(t) \text{ para c.t. } t \in [\bar{S},\bar{T}]. \tag{17}$$

De (14),

$$(-\dot{\chi}(t), -\dot{p}(t)) \in \{(\mathcal{H}_t(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)), \mathcal{H}_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)))\} \text{ para c.t. } t \in [\bar{S},\bar{T}].$$

Luego,

$$(18)\qquad -\dot{\chi}(t) = \mathcal{H}_t(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = p(t)\cdot f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$
$$(19)\qquad -\dot{p}(t) = \mathcal{H}_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = p(t)\cdot f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)).$$

De (15),

$$(\chi(\bar{S}), p(\bar{S}), -\chi(\bar{T}), -p(\bar{T})) \;\in\; \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})),$$

lo cual implica la existencia de $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$ tal que

$$(20)\qquad \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) - (\chi(\bar{S}), p(\bar{S}), -\chi(\bar{T}), -p(\bar{T})) = -(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4).$$

De (16), $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \geq \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u)$ para cada $u \in U$ y para c.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Como (TL) satisface la Definición 3.2, tenemos la existencia de $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ y $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ satisfaciendo (9)–(12).

En particular, por (11) tenemos que $\bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t) \in U$ y, así de la última desigualdad para $u = \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)$ tenemos:

$$(21)\qquad -\left[\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))\right] \geq 0.$$

Por (9) (primera igualdad),

$$\begin{aligned} &\chi(t)\dot{\eta}_1(t) - \chi(t)\xi_2(t) = 0 \\ (22)\qquad &\Leftrightarrow \chi(t)\dot{\eta}_1(t) + \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))\xi_2(t) = 0 \;\text{ (por (17))}. \end{aligned}$$

Por (9) (segunda igualdad),

$$\begin{aligned} &p(t)\cdot\dot{\eta}_2(t) - p(t)\cdot f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_1(t) - p(t)\cdot f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_2(t) \\ &-p(t)\cdot\Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t)) - \xi_2(t)p(t)\cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) = 0 \end{aligned}$$

y usando (18), (19) y por la definición del Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} &p(t)\cdot\dot{\eta}_2(t) + \dot{\chi}(t)\eta_1(t) + \dot{p}(t)\eta_2(t) - \Delta_\alpha\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t)) \\ (23)\qquad &- \xi_2(t)\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) = 0. \end{aligned}$$

Por un lado, de (12), (22) y (23) tenemos:

$$
\begin{aligned}
0 &> \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
&\quad + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} [\chi(t)\dot{\eta}_1(t) + \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))\xi_2(t)]dt \\
&\quad + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} [p(t) \cdot \dot{\eta}_2(t) + \dot{\chi}(t)\eta_1(t) + \dot{p}(t)\eta_2(t) - \Delta_\alpha \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t)) \\
&\quad - \xi_2(t)\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t))]dt \\
&= \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \chi(t)\dot{\eta}_1(t)dt \\
&\quad + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))\xi_2(t)dt + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} p(t) \cdot \dot{\eta}_2(t)dt + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{\chi}(t)\eta_1(t)dt \\
&\quad + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{p}(t) \cdot \eta_2(t)dt - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \Delta_\alpha \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t))dt \\
&\quad - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \xi_2(t)\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t))dt \\
&= \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) + \chi(t)\eta_1(t)|_{\bar{S}}^{\bar{T}} - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{\chi}(t)\eta_1(t)dt \\
&\quad + p(t) \cdot \eta_2(t)|_{\bar{S}}^{\bar{T}} - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{p}(t) \cdot \eta_2(t)dt + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{\chi}(t)\eta_1(t)dt + \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \dot{p}(t) \cdot \eta_2(t)dt \\
&\quad - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \Delta_\alpha \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t))dt \\
&\quad - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \xi_2(t)[\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))]dt \\
&= \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) + \chi(\bar{T})\eta_1(\bar{T}) - \chi(\bar{S})\eta_1(\bar{S}) \\
&\quad + p(\bar{T}) \cdot \eta_2(\bar{T}) - p(\bar{S}) \cdot \eta_2(\bar{S}) - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \Delta_\alpha \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t))dt \\
&\quad - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \xi_2(t)[\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))]dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
&\quad -(\chi(\bar{S}), p(\bar{S}), -\chi(\bar{T}), -p(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
&\quad - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \frac{1}{\alpha}[\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))]dt \\
&\quad - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \xi_2(t)[\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))]dt \\
&= [\nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) - (\chi(\bar{S}), p(\bar{S}), -\chi(\bar{T}), -p(\bar{T}))] \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
&\quad - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \left(\frac{1}{\alpha} + \xi_2(t)\right)[\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))]dt \\
&= -(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
&\quad - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \left(\frac{1}{\alpha} + \xi_2(t)\right)[\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))]dt, \text{ (por (20))},
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\begin{aligned}
&- (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
&- \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \left(\frac{1}{\alpha} + \xi_2(t)\right)[\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))]dt < 0. \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, como $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$ y, como por (10) tenemos que $(\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \in T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$,

$$
-(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \geq 0. \qquad (25)
$$

Por (11), tenemos que $0.5 \leq 1 + \alpha\xi_2(t)$ y así que

$$
\begin{aligned}
&0 < 0.5 < \frac{0.5}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} + \xi_2(t) \qquad \text{(puesto que } 0 < \alpha < 1) \\
&\Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \xi_2(t) > 0. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Por (25), (26) y (21), se sigue que

$$
\begin{aligned}
&- \ (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
&\quad - \int_{\bar{S}}^{\bar{T}} \left(\frac{1}{\alpha} + \xi_2(t)\right)[\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) - \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))]dt \geq 0,
\end{aligned}
$$

lo que contradice (24). Por lo tanto, $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ es un PM–proceso óptimo.

□

Ahora, es natural preguntarse: ¿será que la recíproca es válida? La respuesta es afirmativa según veremos en el siguiente teorema, cuya demostración depende del siguiente lema.

Lema 3.1. *Sean* $(\lambda, q) \in \{0,1\} \times W^{1,1}([\bar{S},\bar{T}];\mathbb{R}^n)$ *y* $\alpha \in (0,1)$. *Sea* $([\bar{S},\bar{T}],\bar{x},\bar{u})$ *un proceso admisible de* (TL) *satisfaciendo*

$$q(t)\Delta_\alpha f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))(v) \leq 0 \text{ para c.t. } t \in [\bar{S},\bar{T}],$$

para todo $v \in \mathbb{R}^m$ *tal que* $\bar{u}(t)+\alpha v \in U(t)$ *para c.t.* $t \in [\bar{S},\bar{T}]$. *Entonces, para c.t.* $t \in [\bar{S},\bar{T}]$,

$$\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),q(t),\bar{u}(t)) = \max_{u\in U(t)} \mathcal{H}(t,\bar{x}(t),q(t),u).$$

Demostración. La demostración es bastante similar a la prueba del Lema 1 en [7]. □

Teorema 3.2. *Si* (TL) *es tal que todo PM–proceso es un proceso óptimo, entonces* (TL) *es PM–pseudoinvexo libre.*

Demostración. Procedamos por contradicción. Asumamos que el problema (TL) no es PM–pseudoinvexo libre. Por la Definición 3.2, supongamos que existen un par de procesos admisibles $([S,T],x,u)$, $([\bar{S},\bar{T}],\bar{x},\bar{u})$ de (TL) satisfaciendo

$$g(S,x(S),T,x(T)) < g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) \tag{27}$$

y un escalar $\alpha \in (0,1)$ tales que para cualquier par (η,ξ), donde $\eta = (\eta_1,\eta_2) : [\bar{S},\bar{T}] \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ y $\xi = (\xi_1,\xi_2) : [\bar{S},\bar{T}] \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ que satisfaciendo

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1(t) &= \xi_2(t), \\ \dot{\eta}_2(t) &= f_t(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_1(t) + f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_2(t) \\ & \quad +\Delta_\alpha f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))(\xi_1(t)) + \xi_2(t) f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)+\alpha\xi_1(t)) \end{cases}$$

para c.t. $t \in [\bar{S},\bar{T}]$ y,

$$\begin{aligned} (\eta_1(\bar{S}),\eta_2(\bar{S}),\eta_1(\bar{T}),\eta_2(\bar{T})) &\in T_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})), \\ (\bar{u}(t)+\alpha\xi_1(t), 1+\alpha\xi_2(t)) &\in U(t)\times[0.5,1.5] \text{ para c.t. } t\in[\bar{S},\bar{T}], \end{aligned}$$

se tiene que

$$\nabla g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T}))\cdot(\eta_1(\bar{S}),\eta_2(\bar{S}),\eta_1(\bar{T}),\eta_2(\bar{T})) \geq 0. \tag{28}$$

Ahora consideremos el problema de control auxiliar con tiempos finales fijos:

$$(PCA)\begin{cases} \text{Minimizar } \phi(\eta_1(\bar{S}),\eta_2(\bar{S}),\eta_1(\bar{T}),\eta_2(\bar{T})) \\ \qquad\qquad = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)\cdot(\eta_1(\bar{S}),\eta_2(\bar{S}),\eta_1(\bar{T}),\eta_2(\bar{T})) \\ \text{sujeto a} \\ (\dot{\eta}_1(t),\dot{\eta}_2(t)) = (\xi_2(t), f_t(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_1(t) + f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_2(t) \\ \qquad\qquad +\Delta_\alpha f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))(\xi_1(t)) + \xi_2(t)f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)+\alpha\xi_1(t))) \\ \qquad\qquad \text{para c.t. } t\in[\bar{S},\bar{T}], \\ (\eta_1(\bar{S}),\eta_2(\bar{S}),\eta_1(\bar{T}),\eta_2(\bar{T})) \in \mathcal{K} := T_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})), \\ \xi(t) = (\xi_1(t),\xi_2(t)) \in V_1(t)\times V_2(t) = V(t), \end{cases}$$

donde $V_1(t) := \{\xi_1 \,|\, \bar{u}(t)+\alpha\xi_1 \in U(t)\}$, $V_2(t) := \{\xi_2 \,|\, 1+\alpha\xi_2 \in [0.5,1.5]\}$ y $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4) = \nabla g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T}))$. Claramente $(\bar{\eta},\bar{\xi}) = (0,0)$ es un proceso admisible de (PCA) con

$$\phi(\bar{\eta}_1(\bar{S}),\bar{\eta}_2(\bar{S}),\bar{\eta}_1(\bar{T}),\bar{\eta}_2(\bar{T})) = 0.$$

Afirmación. $(\bar\eta,\bar\xi)$ es un proceso óptimo para (PCA).
Procedamos por contradicción. Asumamos que $(\bar\eta,\bar\xi)$ no es un proceso óptimo para (PCA), es decir, existe un proceso admisible (η,ξ) de (PCA) tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(\bar\eta_1(\bar S),\bar\eta_2(\bar S),\bar\eta_1(\bar T),\bar\eta_2(\bar T)) \\ &> \phi(\eta_1(\bar S),\eta_2(\bar S),\eta_1(\bar T),\eta_2(\bar T)) \\ &= (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)\cdot(\eta_1(\bar S),\eta_2(\bar S),\eta_1(\bar T),\eta_2(\bar T)) \\ &= \nabla g(\bar S,\bar x(\bar S),\bar T,\bar x(\bar T))\cdot(\eta_1(\bar S),\eta_2(\bar S),\eta_1(\bar T),\eta_2(\bar T)), \end{aligned}$$

lo que contradice (28). Por lo tanto, $(\bar\eta,\bar\xi)$ es un proceso óptimo de (PCA).

Por el Principio del Máximo, ver [24], existen $(\lambda,p)\in\{0,1\}\times W^{1,1}([\bar S,\bar T];\mathbb{R}^n)$ tales que:

1. Se satisface la condición de transversalidad:

$$\begin{aligned} &(p_1(\bar S),p_2(\bar S),-p_1(\bar T),-p_2(\bar T)) \\ &\in \lambda\partial\phi(\bar\eta_1(\bar S),\bar\eta_2(\bar S),\bar\eta_1(\bar T),\bar\eta_2(\bar T)) + N_{\mathcal{K}}(\bar\eta_1(\bar S),\bar\eta_2(\bar S),\bar\eta_1(\bar T),\bar\eta_2(\bar T)) \\ &= \lambda\{\nabla\phi(\bar\eta_1(\bar S),\bar\eta_2(\bar S),\bar\eta_1(\bar T),\bar\eta_2(\bar T))\} + N_{\mathcal{K}}(\bar\eta_1(\bar S),\bar\eta_2(\bar S),\bar\eta_1(\bar T),\bar\eta_2(\bar T)). \end{aligned}$$

   Como

$$\begin{aligned} \nabla\phi(\bar\eta_1(\bar S),\bar\eta_2(\bar S),\bar\eta_1(\bar T),\bar\eta_2(\bar T)) &= (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4) \\ &= \nabla g(\bar S,\bar x(\bar S),\bar T,\bar x(\bar T)) \end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{K}}(\bar\eta_1(\bar S),\bar\eta_2(\bar S),\bar\eta_1(\bar T),\bar\eta_2(\bar T)) &= N_{\mathcal{K}}(0,0,0,0) \\ &= [T_{\mathcal{K}}(0,0,0,0)]^\circ \\ &= \mathcal{K}^\circ \\ &= [T_C(\bar S,\bar x(\bar S),\bar T,\bar x(\bar T))]^\circ \\ &= N_C(\bar S,\bar x(\bar S),\bar T,\bar x(\bar T)) \end{aligned}$$

   (puesto que si T es el cono tangente de Clarke, C un conjunto, $a\in C$, $b\in T_C(a)$ implica que $T_{T_C(a)}(b)=T_C(a)$), tenemos que

$$(p_1(\bar S),p_2(\bar S),-p_1(\bar T),-p_2(\bar T))\in\lambda\nabla g(\bar S,\bar x(\bar S),\bar T,\bar x(\bar T))+N_C(\bar S,\bar x(\bar S),\bar T,\bar x(\bar T)).$$

Antes de pasar a la siguiente condición, el Hamiltoniano no–maximizado para (PCA) es:

$$\begin{array}{rcl}\hat{\mathcal{H}}(t,\eta(t),p(t),\xi(t)) & = & \hat{\mathcal{H}}(t,\eta_1(t),\eta_2(t),p_1(t),p_2(t),\xi_1(t),\xi_2(t)) \\ & = & (p_1(t),p_2(t))\cdot(\xi_2(t),f_t(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_1(t) \\ & & +f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_2(t)+\Delta_\alpha f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))(\xi_1(t)) \\ & & +\xi_2(t)f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)+\alpha\xi_1(t))) \\ & = & p_1(t)\xi_2(t)+p_2(t)\cdot f_t(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_1(t) \\ & & +p_2(t)\cdot f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_2(t) \\ & & +p_2(t)\cdot\Delta_\alpha f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))(\xi_1(t)) \\ & & +p_2(t)\cdot\xi_2(t)f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)+\alpha\xi_1(t)).\end{array}$$

2. Se satisface la condición de la inclusión adjunta:

$$-\dot{p}(t)\in co\,\partial_\eta\hat{\mathcal{H}}(t,\bar{\eta}(t),p(t),\bar{\xi}(t))=\{\partial_\eta\hat{\mathcal{H}}(t,\bar{\eta}(t),p(t),\bar{\xi}(t))\}=\{\hat{\mathcal{H}}_\eta(t,\bar{\eta}(t),p(t),\bar{\xi}(t))\}$$

para c.t. $t\in[\bar{S},\bar{T}]$.

De ahí,

$$\begin{array}{rcl}-\dot{p}(t) & = & \hat{\mathcal{H}}_\eta(t,\bar{\eta}(t),p(t),\bar{\xi}(t)) \\ \Rightarrow(-\dot{p}_1(t),-\dot{p}_2(t)) & = & \hat{\mathcal{H}}_{(\eta_1,\eta_2)}(t,\bar{\eta}_1(t),\bar{\eta}_2(t),p_1(t),p_2(t),\bar{\xi}_1(t),\bar{\xi}_2(t)) \\ & = & (\hat{\mathcal{H}}_{\eta_1}(t,\bar{\eta}_1(t),\bar{\eta}_2(t),p_1(t),p_2(t),\bar{\xi}_1(t),\bar{\xi}_2(t)), \\ & & \hat{\mathcal{H}}_{\eta_2}(t,\bar{\eta}_1(t),\bar{\eta}_2(t),p_1(t),p_2(t),\bar{\xi}_1(t),\bar{\xi}_2(t))) \\ & = & (p_2(t)\cdot f_t(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)),p_2(t)\cdot f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))) \\ & = & (\mathcal{H}_t(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t)),\mathcal{H}_x(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t))) \\ & = & \mathcal{H}_{(t,x)}(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t))\text{ para c.t. }t\in[\bar{S},\bar{T}].\end{array}$$

3. Se satisface la condición de Weierstrass:

$$\begin{array}{rcl}\max\limits_{\xi\in V(t)}\hat{\mathcal{H}}(t,\bar{\eta}(t),p(t),\xi) & = & \hat{\mathcal{H}}(t,\bar{\eta}(t),p(t),\bar{\xi}(t))\text{ para c.t. }t\in[\bar{S},\bar{T}] \\ \Rightarrow\hat{\mathcal{H}}(t,\bar{\eta}(t),p(t),\xi) & \leq & \hat{\mathcal{H}}(t,\bar{\eta}(t),p(t),\bar{\xi}(t))\ \ \forall\,\xi\in V(t)\text{ y para c.t. }t\in[\bar{S},\bar{T}].\end{array}$$

Pero como

$$\begin{array}{rcl}\hat{\mathcal{H}}(t,\bar{\eta}(t),p(t),\xi) & = & p_1(t)\xi_2+p_2(t)\cdot f_t(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\bar{\eta}_1(t) \\ & & +p_2(t)\cdot f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\bar{\eta}_2(t)+p_2(t)\cdot\Delta_\alpha f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))(\xi_1) \\ & & +p_2(t)\cdot\xi_2 f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)+\alpha\xi_1) \\ & = & \xi_2[p_1(t)+p_2(t)\cdot f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)+\alpha\xi_1)] \\ & & +p_2(t)\cdot\Delta_\alpha f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))(\xi_1) \\ & = & \xi_2[p_1(t)+\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t)+\alpha\xi_1)] \\ & & +\Delta_\alpha\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t))(\xi_1)\end{array}$$

y,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}(t,\bar{\eta}(t),p(t),\bar{\xi}(t)) &= p_1(t)\bar{\xi}_2(t)+p_2(t)\cdot f_t(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\bar{\eta}_1(t)\\ &\quad +p_2(t)\cdot f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\bar{\eta}_2(t)\\ &\quad +p_2(t)\cdot\Delta_\alpha f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))(\bar{\xi}_1(t))\\ &\quad +p_2(t)\cdot\bar{\xi}_2(t)f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)+\alpha\bar{\xi}_1(t))\\ &= 0,\end{aligned}$$

puesto que $(\bar{\eta}_1,\bar{\eta}_2,\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2)=(\bar{\eta},\bar{\xi})=(0,0)$, así en la última desigualdad obtenemos

(29) $$\xi_2[p_1(t)+\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t)+\alpha\xi_1)]+\Delta_\alpha\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t))(\xi_1)\leq 0$$

para todo $(\xi_1,\xi_2)\in V_1(t)\times V_2(t)$ y para c.t. $t\in[\bar{S},\bar{T}]$.

En particular para $\xi_2=0\in V_2(t)=\{\xi_2:1+\alpha\xi_2\in[0.5,1.5]\}$, tenemos que:

$$\Delta_\alpha\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t))(\xi_1)\leq 0$$

para todo $\xi_1\in\mathbb{R}^m$ tal que $\bar{u}(t)+\alpha\xi_1\in U(t)$ y para c.t. $t\in[\bar{S},\bar{T}]$, y por el Lema 3.1,

$$\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t))=\max_{u\in U(t)}\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p_2(t),u)\,\text{para c.t.}\,t\in[\bar{S},\bar{T}].$$

Ahora, tomando $\xi_1=0\in V_1(t)=\{\bar{u}(t)+\alpha\xi_1\in U(t)\}$ en (29), tenemos que:

$$\xi_2[p_1(t)+\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t))]\ \leq\ 0$$

para todo $\xi_2\in V_2(t)=\{\xi_2\,|\,1+\alpha\xi_2\in[0.5,1.5]\}=\left\{\xi_2\,|\,\xi_2\in\left[-\frac{0.5}{\alpha},\frac{0.5}{\alpha}\right]\right\}$ y para c.t. $t\in[\bar{S},\bar{T}]$ y, en particular:

- si $\xi_2\in\left[-\frac{0.5}{\alpha},0\right)$, es decir, para $\xi_2<0$, tenemos que $[p_1(t)+\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t))]\geq 0$ para c.t. $t\in[\bar{S},\bar{T}]$ y,

- si $\xi_2\in\left(0,\frac{0.5}{\alpha}\right]$, es decir, para $\xi_2>0$, tenemos que $[p_1(t)+\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t))]\leq 0$ para c.t. $t\in[\bar{S},\bar{T}]$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}p_1(t)+\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t)) &= 0\\ \Rightarrow\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t)) &= -p_1(t)\ \text{para c.t.}\ t\in[\bar{S},\bar{T}].\end{aligned}$$

4. Se satisface la condición de la no–trivialidad de los multiplicadores:

$$(p,\lambda)\neq(0,0)\Rightarrow(p_2,\lambda)\neq(0,0),$$

puesto que si $(p_2,\lambda)=(0,0)$, entonces $p_2=0$ y $\lambda=0$, luego

$$\begin{aligned}-p_1(t) &= \mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p_2(t),\bar{u}(t))\\ &= p_2(t)\cdot f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\\ &= 0\quad\text{para c.t.}\,t\in[\bar{S},\bar{T}].\end{aligned}$$

Por lo tanto, $p_1\equiv 0$ y, así tendríamos:

$(p,\lambda)=((p_1,p_2),\lambda)=((0,0),0)=(0,0)$, pero $(p,\lambda)\neq(0,0)$, lo cual es un absurdo!

Por lo tanto,

- $(p_2, \lambda) \neq (0, 0)$.

En las conclusiones a seguir vamos redefinir $-p_1 := p_1$.

- $(\dot{p}_1(t), -\dot{p}_2(t)) \in \nabla_{(t,x)}\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t))$ para c.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$;
- $(-p_1(\bar{S}), p_2(\bar{S}), p_1(\bar{T}), -p_2(\bar{T})) \in \lambda \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(T)) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(T))$;
- $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t)) = \max\limits_{u \in U} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), u)$ para c.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$;
- $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p_2(t), \bar{u}(t)) = p_1(t)$ para c.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Como existen p_2, p_1 y λ satisfaciendo las últimas propiedades, $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ es un PM–proceso y, por la hipótesis (todo PM–proceso es un proceso óptimo) $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ es un proceso óptimo, es decir,

$$g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \leq g(S, x(S), T, x(T))$$

para cada proceso admisible $([S, T], x, u)$, lo cual contradice (27). Por lo tanto, (TL) es PM–pseudoinvexo libre. □

4. Algunos ejemplos

Inicialmente, vamos a presentar un ejemplo donde no se satisface el concepto de PM–pseudoinvexidad libre, un problema de control donde g es una función cuadrática en T, f es una función lineal en (x, u), el tiempo inicial es fijo, el tiempo final está en un intervalo cerrado de tiempo, el estado inicial es fijo, y el estado final es libre:

Ejemplo 4.1. *Mostraremos que el siguiente problema no es PM–pseudoinvexo libre.*

$$\begin{cases} \textit{Minimizar } g(S, x(S), T, x(T)) = g(T) = -T^2 + 3T \\ \textit{sujeto a intervalos } [S, T], \textit{ arcos } x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}) \textit{ y funciones medibles } u : [S, T] \to \mathbb{R} \\ \textit{satisfaciendo} \\ \dot{x}(t) = f_1(t)x(t) + f_2(t)u(t), \; t \in [S, T], \\ u(t) \in [0, 1], \; t \in [S, T], \\ S = 0, \; T \in [1, 4], \; y \\ x(0) = 0, \; x(T) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución. Vamos a mostrar que un PM–proceso normal en este problema no es un proceso óptimo.

De hecho, sea $\left([\tilde{S}, \tilde{T}], \tilde{x}, \tilde{u}\right) = \left(\left[0, \frac{3}{2}\right], 0, 0\right)$ un proceso admisible. Basta tomar $p = 0$, $r = 0$ y $\lambda = 1$ para que las ecuaciones (4)–(8) sean satisfechas, y asi, $\left([\tilde{S}, \tilde{T}], \tilde{x}, \tilde{u}\right) = \left(\left[0, \frac{3}{2}\right], 0, 0\right)$ sea un PM–proceso normal del problema originalmente dado. Veamos:

Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t,x(t),p(t),u(t)) &= p(t)\cdot f(t,x(t),u(t))\\ &= p(t)\cdot[f_1(t)x(t)+f_2(t)u(t)]\\ &= p(t)\cdot f_1(t)x(t)+p(t)\cdot f_2(t)u(t).\end{aligned}$$

(I) Se satisface la no–trivialidad de los multiplicadores:

$$(p,\lambda)\neq(0,0).$$

(II) Se satisface la condición de la inclusión adjunta:

$$(\dot r(t),-\dot p(t))\in\nabla_{(t,x)}\mathcal{H}(t,\tilde x(t),p(t),\tilde u(t))=\nabla_{(t,x)}[p(t)\cdot f_1(t)\tilde x(t)+p(t)\cdot f_2(t)\tilde u(t)].$$

Antes de pasar a la siguiente condición, note que como $C=\{0\}\times\{0\}\times[1,4]\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&T_{\{0\}}(0)=\{0\}\Rightarrow N_{\{0\}}(0)=\mathbb{R},\\ &T_{\{0\}}(0)=\{0\}\Rightarrow N_{\{0\}}(0)=\mathbb{R},\\ &T_{[1,4]}(y)=\mathbb{R}\Rightarrow N_{[1,4]}(y)=\{0\},\ \ y\in(1,4),\end{aligned}$$

y

$$T_{\mathbb{R}}(y)=\mathbb{R}\Rightarrow N_{\mathbb{R}}(y)=\{0\},\ \ y\in\mathbb{R}.$$

Si $\tilde T=\frac{3}{2}\in(1,4)$, entonces

$$T_C(\tilde S,\tilde x(\tilde S),\tilde T,\tilde x(\tilde T))=\{0\}\times\{0\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

y

$$N_C(\tilde S,\tilde x(\tilde S),\tilde T,\tilde x(\tilde T))=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\}.$$

(III) Se satisface la condición de transversalidad:

$$(-r(\tilde S),p(\tilde S),r(\tilde T),-p(\tilde T))\in\lambda\,\nabla g(\tilde S,\tilde x(\tilde S),\tilde T,\tilde x(\tilde T))+N_C(\tilde S,\tilde x(\tilde S),\tilde T,\tilde x(\tilde T)).$$

Como $g(S,x(S),T,x(T))=g(T)=-T^2+3T$,

$$\nabla g(S,x(S),T,x(T))=(0,0,-2T+3,0),$$

es decir,

$$\nabla g(\tilde S,\tilde x(\tilde S),\tilde T,\tilde x(\tilde T))=(0,0,-2\tilde T+3,0)=\left(0,0,(-2)\left(\frac{3}{2}\right)+3,0\right)=(0,0,0,0).$$

(IV) Se satisface la condición de Weierstrass:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t,\tilde x(t),p(t),\tilde u(t)) &= \max_{u\in[0,1]}\mathcal{H}(t,\tilde x(t),p(t),u)\\ \Leftrightarrow p(t)\cdot f(t,\tilde x(t),\tilde u(t)) &= \max_{u\in[0,1]}p(t)\cdot f(t,\tilde x(t),u)=0 \text{ para c.t. } t\in[\tilde S,\tilde T],\end{aligned}$$

puesto que $p(t)=0$ para todo $t\in[S,T]$.

(V) Se satisface:

$$\mathcal{H}(t,\tilde x(t),p(t),\tilde u(t))=r(t)=0 \text{ para c.t. } t\in[\tilde S,\tilde T].$$

Por tanto, por $(I)-(V)$, $\left([\tilde{S},\tilde{T}],\tilde{x},\tilde{u}\right)=\left(\left[0,\frac{3}{2}\right],0,0\right)$ es un PM–proceso normal.

Además, g desde 1 hasta $\frac{3}{2}$ es creciente y después se vuelve decreciente, y la solución óptima es con $\bar{T}=4$, y note que

$$g(4)=-(4)^2+3(4)=-16+12=-4<\frac{9}{4}=-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}=-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\left(\frac{3}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right).$$

De esta manera, $\left([\tilde{S},\tilde{T}],\tilde{x},\tilde{u}\right)=\left(\left[0,\frac{3}{2}\right],0,0\right)$ no es un proceso óptimo.

Así, como tenemos un PM–proceso normal que no es un proceso óptimo, por el Teorema 3.1, el problema originalmente dado no es PM–pseudoinvexo libre. $\diamond$

Observación 4.1.

1. *Cuando al menos un PM–proceso (normal) de un problema de control óptimo con tiempos finales libres no es óptimo implica a que el problema involucrado no sea PM–pseudoinvexo libre.*
2. *En la teoría de control óptimo no siempre se encontrarán procesos óptimos, sin embargo si consideramos como hipótesis esta nueva definición de PM–pseudoinvexidad libre en los problemas de control óptimo con tiempos finales libres, podemos asegurar que todo todo PM–proceso normal es un proceso óptimo.*

En breve presentaremos dos ejemplos que muestran las características de la noción de la invexidad generalizada libre según el Principio del Máximo para problemas con tiempos finales libres. Cada uno de los dos próximos ejemplos están resueltos de dos maneras. En la primera forma para obtener la PM–pseudoinvexidad libre, aplicamos el Teorema 3.2, mientras que en el segundo procedimiento para obtener la PM–pseudoinvexidad libre, garantizamos que se satisfagan cada una de las propiedades de la Definición 3.2.

Seguidamente, consideremos un ejemplo donde el tiempo inicial es fijo, el tiempo final es libre y, los estados inicial y final están fijos:

Ejemplo 4.2. *Mostraremos que el siguiente problema es PM–pseudoinvexo libre.*

$$\begin{cases} \textit{Minimizar } g(S,x(S),T,x(T))=1-\exp(1-T) \\ \textit{sujeto a intervalos } [S,T],\ \textit{arcos } x\in W^{1,1}([S,T];\mathbb{R}) \textit{ y funciones medibles } u:[S,T]\to\mathbb{R} \\ \textit{satisfaciendo} \\ \dot{x}(t)=-x(t)+(u(t))^2,\ t\in[S,T], \\ u(t)\in[0,1],\ t\in[S,T], \\ S=0,\ T\geq 1,\ y \\ x(0)=0,\ x(T)=1-\exp(-1). \end{cases}$$

Solución 1. Vamos a buscar los PM–procesos del problema en cuestión. Para eso aplicaremos el Principio del Máximo a un proceso admisible de referencia $([\bar{S},\bar{T}],\bar{x},\bar{u})$.

Tenemos que

$$\mathcal{H}(t,x,p,u)=p\cdot f(t,x,u)=p\cdot(-x+u^2)=-px+pu^2. \tag{30}$$

Por el Teorema del Principio del Máximo para (TL) (Teorema 2.1), existen $p \in W^{1,1}([\bar{S},\bar{T}];\mathbb{R})$, $r \in W^{1,1}([\bar{S},\bar{T}];\mathbb{R})$ y un escalar λ (igual a 0 o 1) tales que:

1. Se satisface la no–trivialidad de los multiplicadores:
$$(p,\lambda) \neq (0,0).$$
2. Se satisface la condición de la inclusión adjunta:
$$\begin{array}{rcl} (\dot{r}(t),-\dot{p}(t)) & \in & \nabla_{(t,x)}\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p(t),\bar{u}(t)) = \nabla_{(t,x)}[-p(t)\bar{x}(t)+p(t)(\bar{u}(t))^2] \\ \Rightarrow (\dot{r}(t),-\dot{p}(t)) & = & \big(\nabla_t[-p(t)\bar{x}(t)+p(t)(\bar{u}(t))^2], \nabla_x[-p(t)\bar{x}(t)+p(t)(\bar{u}(t))^2]\big) \\ & = & (0,-p(t)) \text{ para c.t. } t \in [\bar{S},\bar{T}]. \end{array}$$
Conclusioness:
$$\begin{aligned} &\dot{r}(t) = 0 \Rightarrow r(t) = \text{ constante}, \\ &-\dot{p}(t) = -p(t) \Rightarrow p(t) = K\exp(t), \text{ donde } K \text{ es una constante.} \end{aligned} \tag{31}$$
Antes de pasar a la siguiente condición del Principio del Máximo, notemos que como $C = \{0\}\times\{0\}\times[1,+\infty)\times\{1-\exp(-1)\}$,
$$\begin{aligned} &T_{\{0\}}(0) = \{0\} \Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R}, \\ &T_{\{0\}}(0) = \{0\} \Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R}, \\ &T_{[1,+\infty)}(y) = \mathbb{R} \Rightarrow N_{[1,+\infty)}(y) = \{0\},\ y \in (1,+\infty), \\ &T_{[1,+\infty)}(1) = \mathbb{R}_+ \Rightarrow N_{[1,+\infty)}(1) = \mathbb{R}_-, \end{aligned}$$
y
$$T_{(1-\exp(-1))}(1-\exp(-1)) = \{0\} \Rightarrow N_{(1-\exp(-1))}(1-\exp(-1)) = \mathbb{R}.$$
Así tenemos dos casos:

Caso 1. Si $\bar{T} \in (1,+\infty)$:
$$T_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) = \{0\}\times\{0\}\times\mathbb{R}\times\{0\}$$
y
$$N_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{0\}\times\mathbb{R}.$$
Caso 2. Si $\bar{T} = 1$:
$$T_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) = \{0\}\times\{0\}\times\mathbb{R}_+\times\{0\}$$
y
$$N_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}.$$
3. Se satisface la condición de la transversalidad:
$$(-r(\bar{S}),p(\bar{S}),r(\bar{T}),-p(\bar{T})) \in \lambda\,\nabla g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})).$$
Como $g(S,x(S),T,x(T)) = 1-\exp(1-T)$,
$$\nabla g(S,x(S),T,x(T)) = (0,0,\exp(1-\bar{T}),0).$$

Luego

$$
\begin{aligned}
&-r(\bar{S}),\ p(\bar{S}),\ -p(\bar{T}) \text{ son libres,}\\
&r(\bar{T}) = \begin{cases} \lambda\exp(1-\bar{T}), & \text{en el caso 1,}\\ \lambda\exp(1-\bar{T}) + \upsilon = \lambda + \upsilon, \upsilon \in \mathbb{R}_-, & \text{en el caso 2.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Antes de pasar a la siguiente condición, reemplazando (31) en (30) obtenemos:

$$\mathcal{H}(t, x(t), p(t), u(t)) = -p(t)x(t) + p(t)(u(t))^2 = -K\exp(t)x(t) + K\exp(t)(u(t))^2.$$

4. Se satisface la condición de Weierstrass:

$$
\begin{aligned}
\max_{u\in[0,1]} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u) &= \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))\\
\Leftrightarrow \max_{u\in[0,1]} [-K\exp(t)\bar{x}(t) + K\exp(t)u^2] &= -K\exp(t)\bar{x}(t) + K\exp(t)(\bar{u}(t))^2
\end{aligned}
$$

para c.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Definamos

$$\varphi(u) := -K\exp(t)\bar{x}(t) + K\exp(t)u^2.$$

Entonces

$$\max_{u\in[0,1]} [-K\exp(t)\bar{x}(t) + K\exp(t)u^2] = \max_{u\in[0,1]} \varphi(u) = \begin{cases} \varphi(0), & \text{si } K < 0,\\ \varphi(1), & \text{si } K > 0.\end{cases}$$

Caso $K = 0$, φ es constante y todo punto $u \in [0,1]$ es punto de máximo (en particular $u = 0$). De este modo,

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } K < 0,\\ 1, & \text{si } K > 0\end{cases}$$

para todo $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Luego, para $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$,

$$\dot{\bar{x}}(t) = -\bar{x}(t) + (\bar{u}(t))^2 = \begin{cases} -\bar{x}(t), & \text{si } K < 0,\\ -\bar{x}(t) + 1, & \text{si } K > 0.\end{cases}$$

Si $K < 0$: Tenemos que $\dot{\bar{x}}(t) = -\bar{x}(t)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(t) &= C_1\exp(-t), \text{ donde } C_1 \text{ es una constante}\\
0 = \bar{x}(\bar{S}) &= C_1\exp(-\bar{S}) \Leftrightarrow C_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\bar{x}(t) = 0$, $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Si $K > 0$: Tenemos que $\dot{\bar{x}}(t) = -\bar{x}(t) + 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(t) &= 1 + C_2\exp(-t), \text{ donde } C_2 \text{ es una constante}\\
0 = \bar{x}(\bar{S}) &= 1 + C_2\exp(-\bar{S}) \Leftrightarrow C_2 = -1.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\bar{x}(t) = 1 - \exp(-t)$, $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Así

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } K < 0, \\ 1 - \exp(-t), & \text{si } K > 0, \end{cases}$$

para todo $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Si $K < 0$, $x(\bar{T}) = 0$ y por la condición final tenemos que $x(T) = 1 - \exp(-1) = x(\bar{T})$, así

$$0 = 1 - \exp(-1), \text{ lo cual es un absurdo.}$$

Por lo tanto, $K < 0$ no puede ocurrir.

Como sólo puede ocurrir que $K > 0$, $x(\bar{T}) = 1 - \exp(-\bar{T})$ y por la condición final tenemos que $x(T) = 1 - \exp(-1) = x(\bar{T})$, así

$$1 - \exp(-\bar{T}) = 1 - \exp(-1) \Leftrightarrow \bar{T} = 1.$$

Por lo tanto, $\bar{T} \in (1, \infty)$ no puede ocurrir, implicando finalmente que

$$\begin{cases} \bar{T} = 1, \\ \bar{x}(t) = 1 - \exp(-t), \\ \bar{u}(t) = 1, \end{cases}$$

para todo $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$.

Antes de pasar a la siguiente condición,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) &= -K \exp(t) \bar{x}(t) + K \exp(t) (\bar{u}(t))^2 \\ &= -K \exp(t)[1 - \exp(-t)] + K \exp(t) \\ &= K, \end{aligned}$$

para c.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$ y $K > 0$.

5. Se satisface:

$$r(t) = \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = K$$

para c.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$ y $K > 0$.

Concluimos que el único PM–proceso es: $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u}) = ([0, 1], 1 - \exp(-t), 1)$. Ahora vamos a mostrar que todo PM–proceso es un proceso óptimo. De hecho, sea $([S, T], x, u)$ un proceso admisible. Luego

$$\begin{aligned} T &\geq 1 = \bar{T} \\ \Leftrightarrow -\bar{T} &\geq -T \\ \Leftrightarrow 1 - \bar{T} &\geq 1 - T \\ \Leftrightarrow \exp(1 - \bar{T}) &\geq \exp(1 - T) \\ \Leftrightarrow 1 - \exp(1 - T) &\geq 1 - \exp(1 - \bar{T}) \\ \Leftrightarrow g(S, x(S), T, x(T)) &\geq g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema 3.2, el problema es PM–pseudoinvexo libre.

Solución 2. Sean $([S,T],x,u)$ y $([\bar{S},\bar{T}],\bar{x},\bar{u})$ un par de procesos admisibles tales que

$$\begin{aligned} g(S,x(S),T,x(T)) &< g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) \\ \Leftrightarrow 1-\exp(1-T) &< 1-\exp(1-\bar{T}) \\ \Leftrightarrow \exp(1-T) &> \exp(1-\bar{T}) \\ \Leftrightarrow T &< \bar{T}. \end{aligned}$$

En este problema, tenemos que $C=\{0\}\times\{0\}\times[1,+\infty)\times\{1-\exp(-1)\}$. Luego

$T_{\{0\}}(0)=\{0\}\Rightarrow N_{\{0\}}(0)=\mathbb{R}$,
$T_{\{0\}}(0)=\{0\}\Rightarrow N_{\{0\}}(0)=\mathbb{R}$,
$T_{[1,+\infty)}(y)=\mathbb{R}\Rightarrow N_{[1,+\infty)}(y)=\{0\},\ y\in(1,+\infty)$,
$T_{[1,+\infty)}(1)=\mathbb{R}_+\Rightarrow N_{[1,+\infty)}(1)=\mathbb{R}_-$ (pero esto no ocurre, si fuera así $1\leq T<\bar{T}=1$),

y

$$T_{(1-\exp(-1))}(1-\exp(-1))=\{0\}\Rightarrow N_{(1-\exp(-1))}(1-\exp(-1))=\mathbb{R}.$$

Así

$$T_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T}))=\{0\}\times\{0\}\times\mathbb{R}\times\{0\}$$

y

$$N_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T}))=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{0\}\times\mathbb{R}.$$

Tenemos que mostrar la existencia de $\eta(t)=(\eta_1(t),\eta_2(t))$ e $\xi(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t))$ satisfaciendo (9)–(12).

Sea $\alpha\in(0,1)$. Como $\dot{x}=f(t,x,u)=-x+u^2$, tenemos que

$$\begin{aligned} f_t(t,x,u) &= 0, \\ f_x(t,x,u) &= -1, \\ \Delta_\alpha f(t,\bar{x},\bar{u})(\xi_1) &= \frac{f(t,\bar{x},\bar{u}+\alpha\xi_1)-f(t,\bar{x},\bar{u})}{\alpha}=\frac{[-\bar{x}+(\bar{u}+\alpha\xi_1)^2]-[-\bar{x}+\bar{u}^2]}{\alpha} \\ &= 2\bar{u}\xi_1+\alpha\xi_1^2 \end{aligned}$$

y

$$f(t,\bar{x},\bar{u}+\alpha\xi_1)=-\bar{x}+(\bar{u}+\alpha\xi_1)^2=-\bar{x}+\bar{u}^2+2\bar{u}\alpha\xi_1+\alpha^2\xi_1^2.$$

Luego,

$$\dot{\eta}_1(t)=\xi_2(t)\text{ para c.t. } t\in[\bar{S},\bar{T}] \tag{32}$$

y

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_2(t) &= f_t(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_1(t) + f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_2(t) + \Delta_\alpha f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))(\xi_1(t))\\ &\quad + \xi_2(t) f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)+\alpha\xi_1(t))\\ &= -\eta_2(t) + 2\bar{u}(t)\xi_1(t) + \alpha(\xi_1(t))^2\\ &\quad + \xi_2(t)[-\bar{x}(t) + (\bar{u}(t))^2 + 2\bar{u}(t)\alpha\xi_1(t) + \alpha^2(\xi_1(t))^2] \text{ para c.t. } t\in[\bar{S},\bar{T}],\end{aligned} \tag{33}$$

con $(\eta_1(\bar{S}),\eta_2(\bar{S}),\eta_1(\bar{T}),\eta_2(\bar{T})) \in T_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) = \{0\}\times\{0\}\times\mathbb{R}\times\{0\}$, de donde

$$\begin{cases}\eta_1(\bar{S}) = 0,\\ \eta_2(\bar{S}) = 0,\\ \eta_1(\bar{T}) \in \mathbb{R},\\ \eta_2(\bar{T}) = 0.\end{cases}$$

Definamos $\xi_2(t) := -0.125,\ t\in[\bar{S},\bar{T}]$. Claramente, se tiene que $1+\alpha\xi_2(t)\in[0.5,1.5]$ para todo $t\in[\bar{S},\bar{T}]$.

Ahora definamos $\xi_1(t) := 0$, entonces $\bar{u}(t)+\alpha\xi_1(t) = \bar{u}(t)\in[0,1]$ y así $\bar{u}(t)+\alpha\xi_1(t)\in[0,1]$ para todo $t\in[\bar{S},\bar{T}]$.

Integrando en (32), tenemos que:

$$\begin{aligned}\eta_1(t) &= \eta_1(\bar{S}) + \int_0^t \xi_2(\tau)\,d\tau\\ &= -\int_0^t 0.125\,d\tau\\ &= -0.125t \text{ para c.t. } t\in[\bar{S},\bar{T}].\end{aligned}$$

En (33), tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_2(t) &= -\eta_2(t) + \{-0.125[-\bar{x}(t) + (\bar{u}(t))^2]\}\\ \Rightarrow \dot{\eta}_2(t) + \eta_2(t) &= \{-0.125[-\bar{x}(t) + (\bar{u}(t))^2]\},\end{aligned}$$

cuya solución está dada por

$$\eta_2(t) = \frac{1}{\exp(t)}\left[\int_0^t \exp(\tau)\{-0.125[-\bar{x}(\tau) + (\bar{u}(\tau))^2]\}d\tau + K\right],$$

donde K es una constante.

Como $g(S,x(S),T,x(T)) = 1-\exp(1-T)$, entonces

$$\nabla g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) = (0,0,\exp(1-\bar{T}),0).$$

Así

$$\begin{aligned} & \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\ = \; & (0, 0, \exp(1 - \bar{T}), 0) \cdot (0, 0, -0.125\bar{T}, 0) \\ = \; & -\exp(1 - \bar{T}) \cdot 0.125\bar{T} \\ < \; & 0. \end{aligned}$$

Luego, para cada par de procesos admisibles $([S, T], x, u)$ y $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ de nuestro problema de control óptimo tales que $g(S, x(S), T, x(T)) < g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$ existen $\eta(t)$ y $\xi(t)$ satisfaciendo (9)–(12) para todo $\alpha \in (0, 1)$, esto es, nuestro problema de control óptimo es PM–pseudoinvexo libre. $\diamond$

A continuación, consideremos una variante del Ejemplo 4.1, un problema de control donde g es una función cuadrática en T, f es una función lineal en (x, u), el tiempo inicial es fijo, el tiempo final está en un intervalo cerrado de tiempo, el estado inicial es fijo, el estado final es libre y el problema está satisfaciendo una propiedad suficiente para establecer la PM–pseudoinvexidad libre:

Ejemplo 4.3. *Mostraremos que el siguiente problema es PM–pseudoinvexo libre.*

$$\begin{cases} \textit{Minimizar } g(S, x(S), T, x(T)) = AT^2 + BT + C, \ \textit{con } A < 0, \ B \textit{ y } C \textit{ constantes} \\ \textit{sujeto a intervalos } [S, T], \ \textit{arcos } x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}) \textit{ y funciones medibles } u : [S, T] \to \mathbb{R} \\ \textit{satisfaciendo} \\ \dot{x}(t) = f_1(t)x(t) + f_2(t)u(t), \ t \in [S, T], \\ u(t) \in [0, 1], \ t \in [S, T], \\ S = 0, \ T \in [a, b], \ 0 < a < b, \\ x(0) = 0, \ x(T) \in \mathbb{R} \textit{ y}, \\ \textit{satisfaciendo también que } B < -2Aa < -2Ab. \end{cases}$$

Observación 4.2. *Observemos lo siguiente:*

1. *Si $A > 0$, la función g sería convexa, consecuentemente invexa y así pseudoinvexa.*
2. *Como $g(T) = g(S, x(S), T, x(T)) = AT^2 + BT + C$ tenemos que*

$$g'(T) = 2AT + B \quad \forall \ T \in [a, b].$$

Como por hipótesis $T \in [a, b]$, $A < 0$ y $2Aa + B < 0$,

$$2AT + B \leq 2Aa + B < 0.$$

Luego, $g'(T) = 2AT + B < 0$ para todo $T \in [a, b]$ y, así g es decreciente en $[a, b]$.

3. *El gráfico de una función cuadrática es una parábola. El eje de simetría de una parábola es una recta vertical que divide la parábola en dos mitades congruentes. El eje de simetría pasa siempre por el vértice de la parábola. La coordenada x del vértice es la ecuación del eje de simetría de la parábola. Para una función cuadrática general $y(x) = Ax^2 + Bx + C$, la ecuación del eje de simetría está dada por*

$$x = -\frac{B}{2A}.$$

Así, en este ejemplo en particular, el eje de simetría satisface que

$$-\frac{B}{2A} < a \ (\textit{puesto que } -B > 2Aa),$$

lo que significa que el eje de simetría siempre está antes de a ($T \in [a,b]$ donde $0 < a < b$) lo que fuerza a nuestra función objetivo g a ser realmente decreciente.

Solución 1. Vamos a buscar los PM–procesos del problema en cuestión. Para eso aplicaremos el Principio del Máximo a un proceso admisible de referencia $([\bar{S},\bar{T}],\bar{x},\bar{u})$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t,x(t),p(t),u(t)) &= p(t)\cdot f(t,x(t),u(t)) \\ &= p(t)\cdot[f_1(t)x(t)+f_2(t)u(t)] \\ &= p(t)\cdot f_1(t)x(t)+p(t)\cdot f_2(t)u(t). \end{aligned}$$

Por el Teorema del Principio del Máximo para (TL) (Teorema 2.1), deben existir $p \in W^{1,1}([\bar{S},\bar{T}];\mathbb{R})$, $r \in W^{1,1}([\bar{S},\bar{T}];\mathbb{R})$ y un escalar λ (igual a 0 o 1) tales que:

1. Se satisface la no–trivialidad de los multiplicadores:

$$(p,\lambda) \neq (0,0).$$

2. Se satisface la condición de la inclusión adjunta:

$$\begin{aligned} (\dot{r}(t),-\dot{p}(t)) &\in \nabla_{(t,x)}\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p(t),\bar{u}(t)) = \nabla_{(t,x)}[p(t)f_1(t)\bar{x}(t)+p(t)f_2(t)\bar{u}(t)] \\ \Rightarrow (\dot{r}(t),-\dot{p}(t)) &= (p(t)f_1'(t)\bar{x}(t)+p(t)f_2'(t)\bar{u}(t),p(t)f_1(t)) \text{ para c.t. } t\in[\bar{S},\bar{T}]. \end{aligned}$$

Conclusiones:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= p(t)f_1'(t)\bar{x}(t)+p(t)f_2'(t)\bar{u}(t), \\ -\dot{p}(t) &= f_1(t)p(t) \Rightarrow p(t) = \frac{K}{\exp\left(\int_{S=0}^{t} f_1(\tau)d\tau\right)}, \text{ donde } K \text{ es una constante.} \end{aligned}$$

Antes de pasar a la siguiente condición del Principio del Máximo, notemos que como $C = \{0\}\times\{0\}\times[a,b]\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &T_{\{0\}}(0) = \{0\} \Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R}, \\ &T_{\{0\}}(0) = \{0\} \Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R}, \\ &T_{[a,b]}(y) = \mathbb{R} \Rightarrow N_{[a,b]}(y) = \{0\},\ y\in(a,b), \\ &T_{[a,b]}(a) = \mathbb{R}_+ \Rightarrow N_{[a,b]}(a) = \mathbb{R}_-, \\ &T_{[a,b]}(b) = \mathbb{R}_- \Rightarrow N_{[a,b]}(b) = \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

y

$$T_{\mathbb{R}}(y) = \mathbb{R} \Rightarrow N_{\mathbb{R}}(y) = \{0\},\ y\in\mathbb{R}.$$

Así tenemos tres casos:

Caso 1. Si $\bar{T}\in(a,b)$:

$$T_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) = \{0\}\times\{0\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

y

$$N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}.$$

<u>Caso 2</u>. Si $\bar{T} = a$:

$$T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

y

$$N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \times \{0\}.$$

<u>Caso 3</u>. Si $\bar{T} = b$:

$$T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$$

y

$$N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \{0\}.$$

3. Se satisface la condición de transversalidad:

$$(-r(\bar{S}), p(\bar{S}), r(\bar{T}), -p(\bar{T})) \in \lambda \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})).$$

Como $g(S, x(S), T, x(T)) = AT^2 + BT + C$,

$$\nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = (0, 0, 2A\bar{T} + B, 0).$$

Luego,

$$-\, r(\bar{S}),\ p(\bar{S}) \text{ son libres},$$

$$r(\bar{T}) = \begin{cases} 2\lambda A\bar{T} + \lambda B, \ \text{en el caso 1}, \\ 2\lambda A\bar{T} + \lambda B + \upsilon, \ \upsilon \in \mathbb{R}_-, \ \text{en el caso 2}, \\ 2\lambda A\bar{T} + \lambda B + \omega, \ \omega \in \mathbb{R}_+, \ \text{en el caso 3}, \end{cases}$$

$$-\, p(\bar{T}) = 0 \Rightarrow -\frac{K}{\exp\left(\int_0^{\bar{T}} f_1(\tau) d\tau\right)} = 0 \Rightarrow K = 0.$$

Así

$$p(t) = \frac{K}{\exp\left(\int_0^{t} f_1(\tau) d\tau\right)} = 0 \text{ para todo } t \in [\bar{S}, \bar{T}]. \tag{34}$$

Además, $\lambda = 1$, puesto que si fuera $\lambda = 0$, tendríamos una contradicción con respecto a la no–trivialidad de los multiplicadores. Por tanto,

$$r(\bar{T}) = \begin{cases} 2A\bar{T} + B, & \text{en el caso 1}, \\ 2A\bar{T} + B + \upsilon, \ \upsilon \in \mathbb{R}_-, & \text{en el caso 2}, \\ 2A\bar{T} + B + \omega, \ \omega \in \mathbb{R}_+, & \text{en el caso 3}. \end{cases}$$

4. Se satisface la condición de Weierstrass:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) &= \max_{u \in [0,1]} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u) \\ \Leftrightarrow p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \max_{u \in [0,1]} p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), u) = 0 \text{ para c.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}], \end{aligned}$$

por (34).

5. Se satisface:

$$0 = \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = r(t) \text{ para c.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}].$$

En particular, $r(\bar{T}) = 0$ y así

$$0 = \begin{cases} 2A\bar{T} + B, & \text{en el caso 1,} \\ 2A\bar{T} + B + \upsilon, \ \upsilon \leq 0, & \text{en el caso 2,} \\ 2A\bar{T} + B + \omega, \ \omega \geq 0, & \text{en el caso 3.} \end{cases}$$

En el caso 1, tenemos $2A\bar{T} + B = 0$, es decir, $\bar{T} = -B/2A$. Sin embargo, en el caso 1 tenemos que $\bar{T} \in (a, b)$. Así, $-B/2A > a$, es decir, $B > -2Aa$, lo cual contradice a la hipótesis inicial.

En el caso 2, tenemos $2Aa + B + \upsilon = 0$ con $\upsilon \leq 0$. Sin embargo, en el caso 2 tenemos que $\bar{T} = a$. Así, $0 \geq \upsilon = -(2Aa + B)$, de donde $B \geq -2Aa$, lo cual contradice nuevamente a la hipótesis inicial.

Por lo tanto, sólo puede ocurrir el:

Caso 3, con $\bar{T} = b$ y $2Ab + B + \omega = 0$ donde $w \geq 0$, es decir, $2Ab + B \leq 0$.

Concluimos que los PM–procesos están caracterizados sólo por $\bar{T} = b$, es decir, todo proceso admisible con $\bar{T} = b$ es un PM–proceso. Ahora vamos a mostrar que todo PM–proceso es un proceso óptimo. De hecho, sea $([S, T], x, u)$ un proceso admisible. Como g es decreciente y como $T \leq b = \bar{T}$, tenemos que

$$g(T) \geq g(\bar{T}) \Leftrightarrow g(S, x(S), T, x(T)) \geq g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})).$$

Por lo tanto, por el Teorema 3.2, el problema es PM–pseudoinvexo libre.

Solución 2. Sean $([S, T], x, u)$ y $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ un par de procesos admisibles tales que

$$g(S, x(S), T, x(T)) < g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \Leftrightarrow g(T) < g(\bar{T}),$$

y como g es decreciente tenemos que $T > \bar{T}$.

Por otra parte, tenemos dos casos $-2A\bar{T} \leq B$ o $B < -2A\bar{T}$.

Si $-2A\bar{T} \leq B$, entonces $-2A\bar{T} \leq B < -2Aa$, de donde, recordando que $A < 0$, se sigue que $\bar{T} < a$, lo que contradice el hecho de que $\bar{T} \in [a, b]$.

Luego $-2A\bar{T} \leq B$ no ocurre. Por lo tanto, solo puede ocurrir $B < -2A\bar{T}$, es decir,

$$2A\bar{T} + B < 0. \tag{35}$$

En este problema, tenemos que $C = \{0\} \times \{0\} \times [a, b] \times \mathbb{R}$. Luego,

$T_{\{0\}}(0) = \{0\} \Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R}$,

$T_{\{0\}}(0) = \{0\} \Rightarrow N_{\{0\}}(0) = \mathbb{R}$,

$T_{[a,b]}(y) = \mathbb{R} \Rightarrow N_{[a,b]}(y) = \{0\},\ y \in (a, b)$,

$T_{[a,b]}(a) = \mathbb{R}_+ \Rightarrow N_{[a,b]}(a) = \mathbb{R}_-$,

$T_{[a,b]}(b) = \mathbb{R}_- \Rightarrow N_{[a,b]}(b) = \mathbb{R}_+$ (pero esto no ocurre, puesto que si $\bar{T} = b$ tendríamos

$$b = \bar{T} < T \leq b, \text{ lo cual es un absurdo!})$$

y

$$T_{\mathbb{R}}(y) = \mathbb{R} \Rightarrow N_{\mathbb{R}}(y) = \{0\},\ y \in \mathbb{R}.$$

Así, sólo tenemos dos casos:

Caso 1.

$$T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

y

$$N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}.$$

Caso 2.

$$T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

y

$$N_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \times \{0\}.$$

Tenemos que mostrar la existencia de $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))$ y $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ satisfaciendo (9)–(12).

Sea $\alpha \in (0, 1)$. Como $\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) = f_1(t)x(t) + f_2(t)u(t)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
f_t(t, x(t), u(t)) &= f_1'(t)x(t) + f_2'(t)u(t), \\
f_x(t, x(t), u(t)) &= f_1(t), \\
\Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi_1) &= \frac{f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) - f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\alpha} \\
&= \frac{[f_1(t)\bar{x}(t) + f_2(t)(\bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t))] - [f_1(t)\bar{x}(t) + f_2(t)\bar{u}(t)]}{\alpha} \\
&= \frac{f_1(t)\bar{x}(t) + f_2(t)\bar{u}(t) + f_2(t)\alpha\xi_1(t) - f_1(t)\bar{x}(t) - f_2(t)\bar{u}(t)}{\alpha} \\
&= f_2(t)\xi_1(t),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) &= f_1(t)\bar{x}(t) + f_2(t)(\bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) \\
&= f_1(t)\bar{x}(t) + f_2(t)\bar{u}(t) + f_2(t)\alpha\xi_1(t).
\end{aligned}$$

Luego,

(36) $$\dot{\eta}_1(t) = \xi_2(t) \text{ para c.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}]$$

y

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_2(t) &= f_t(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_1(t) + f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_2(t) + \Delta_\alpha f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))(\xi_1(t)) \\
&\quad + \xi_2(t) f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)+\alpha\xi_1(t))) \\
&= [f_1'(t)x(t) + f_2'(t)u(t)]\eta_1(t) + f_1(t)\eta_2(t) + f_2(t)\xi_1(t) \\
&\quad + \xi_2(t)[f_1(t)\bar{x}(t) + f_2(t)\bar{u}(t) + f_2(t)\alpha\xi_1(t)] \text{ para c.t. } t \in [\bar{S},\bar{T}], \tag{37}
\end{aligned}$$

con $(\eta_1(\bar{S}),\eta_2(\bar{S}),\eta_1(\bar{T}),\eta_2(\bar{T})) \in T_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T}))$.

En el caso 1,

$$\begin{cases} \eta_1(\bar{S}) = 0, \\ \eta_2(\bar{S}) = 0, \\ \eta_1(\bar{T}) \in \mathbb{R}, \\ \eta_2(\bar{T}) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En el caso 2,

$$\begin{cases} \eta_1(\bar{S}) = 0, \\ \eta_2(\bar{S}) = 0, \\ \eta_1(\bar{T}) \in \mathbb{R}_+, \\ \eta_2(\bar{T}) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tanto para el caso 1 como para el caso 2, tomemos $\xi_2(t) := 0.1$, para $t \in [\bar{S},\bar{T}]$. Claramente, $1 + \alpha\xi_2(t) \in [0.5, 1.5]$ para todo $t \in [\bar{S},\bar{T}]$.

Ahora, tanto para el caso 1 como para el caso 2, tomemos $\xi_1(t) := 0$, para $t \in [\bar{S},\bar{T}]$. Recordando que $\bar{u}(t) \in [0,1]$, para c.t. $t \in [\bar{S},\bar{T}]$, entonces $\bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t) = \bar{u}(t) \in [0,1]$ para c.t. $t \in [\bar{S},\bar{T}]$.

Integrando en (36), tenemos que:

$$\eta_1(t) = \eta_1(\bar{S}) + \int_0^t \xi_2(\tau)\,d\tau = \int_0^t 0.1\,d\tau = 0.1t \text{ para c.t. } t \in [\bar{S},\bar{T}].$$

En (37), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_2(t) &= [f_1'(t)x(t) + f_2'(t)u(t)]\eta_1(t) + f_1(t)\eta_2(t) + f_2(t)\xi_1(t) \\
&\quad + \xi_2(t)[f_1(t)\bar{x}(t) + f_2(t)\bar{u}(t) + f_2(t)\alpha\xi_1(t)] \\
\dot{\eta}_2(t) &= 0.1[f_1'(t)x(t) + f_2'(t)u(t)]t + f_1(t)\eta_2(t) + 0.1\dot{\bar{x}}(t) \\
&= 0.1\{[f_1'(t)x(t) + f_2'(t)u(t)]t + \dot{\bar{x}}(t)\} + f_1(t)\eta_2(t) \\
\Rightarrow \dot{\eta}_2(t) + [-f_1(t)]\eta_2(t) &= 0.1\{[f_1'(t)x(t) + f_2'(t)u(t)]t + \dot{\bar{x}}(t)\},
\end{aligned}$$

cuya solución está dada por

$$\begin{aligned}
\eta_2(t) &= \frac{1}{\exp(-\int_0^t f_1(\tau)d\tau)}[-0.1\int_0^t \exp\left(\int_0^\tau f_1(\tau)d\tau\right)([f_1'(\tau)x(\tau) + f_2'(\tau)u(\tau)]t + \dot{\bar{x}}(\tau))d\tau \\
&\quad + K],
\end{aligned}$$

donde K es una constante.

Como $g(S, x(S), T, x(T)) = AT^2 + BT + C$, entonces

$$\nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) = (0, 0, 2A\bar{T} + B, 0).$$

Así

$$\begin{aligned}
& \nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \\
= \;& (0, 0, 2A\bar{T} + B, 0) \cdot (0, 0, 0.1\bar{T}, \eta_2(\bar{T})) \\
= \;& (2A\bar{T} + B) \cdot 0.1\bar{T} \\
< \;& 0 \,(\text{por}\,(35)).
\end{aligned}$$

Luego, para cada par de procesos admisibles $([S, T], x, u)$ y $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ de nuestro problema de control óptimo tales que $g(S, x(S), T, x(T)) < g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$ existen $\eta(t)$ y $\xi(t)$ satisfaciendo (9)–(12) para todo $\alpha \in (0, 1)$, es decir, nuestro problema de control óptimo es PM–pseudoinvexo libre. $\diamond$

Observación 4.3. *Resaltamos que el problema lineal cuadrático anterior no es convexo cuando $A < 0$. Sin embargo, según vimos, es PM–pseudoinvexo libre con la condición $B < -2Aa$. Cuando $A > 0$, el problema es convexo y, consecuentemente, es PM–pseudoinvexo libre.*

5. Conclusiones

En ese trabajo, con una nueva definición de invexidad generalizada, que denominamos PM–pseudoinvexidad libre, mostramos que, con algunas suposiciones: un problema PM–pseudoinvexo libre implica que todo PM–proceso normal es un proceso óptimo, y si un problema es tal que todo PM-proceso es un proceso óptimo implica que el problema es PM–pseudoinvexo libre. Por lo tanto, concluimos que la clase de problemas PM-pseudoinvexos libres es la clase más amplia de problemas libres donde es válido que todos los procesos que satisfacen el Principio de Maximo de Pontryagin con tiempos finales libres son procesos óptimos. Es decir, el concepto de la PM–pseudoinvexidad libre es el más general que una condición suficiente de invexidad generalizada puede tener.

6. Agradecimientos

Se agradece al Editor Jefe, al Comité Editorial, al Consejo de Edición y especialmente a los árbitros anónimos por sus comentarios críticos, sus correcciones y sus sugerencias. También se agradece el apoyo de la Carrera de Matemática de la Universidad Mayor de San Andrés.

Referencias

[1] A. V. Arutyunov. Smooth abnormal problems in extremum theory and analysis. *Russian Math. Surveys*, 67:3:403–457, 2012.

[2] J. Baumeister and A. Leitão. *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica.* Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 2008.

[3] A. Ben-Israel and B. Mond. What is invexity? *J. Austral. Math. Soc.*, Ser. B 28:1–9, 1986.

[4] L. D. Berkovitz. *Convexity and Optimization in* $\mathbb{R}^n$. John Wiley and Sons, Inc., New York, 2002.

[5] B. D. Craven and B. M. Glover. Invex functions and duality. *J. Austral. Math. Soc.*, Series A 39:1–20, 1985.

[6] V. A. de Oliveira and G. N. Silva. New optimality conditions for nonsmooth control problems. *J. Glob. Optim.*, 57:1465–1484, 2013.

[7] V. A. de Oliveira and G. N. Silva. On sufficient optimality conditions for multiobjective control problems. *J. Glob. Optim.*, 64:721–744, 2016.

[8] V. A. de Oliveira, G. N. Silva, and M. A. Rojas-Medar. A class of multiobjective control problems. *Optim. Control Appl. Meth.*, 30:77–86, 2009.

[9] V. A. de Oliveira, G. N. Silva, and M. A. Rojas-Medar. KT-invexity in optimal control problems. *Nonlinear Anal.-Theory Methods Appl.*, 71:4790–4797, 2009.

[10] M. A. Hanson. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Aplications*, 80:545–550, 1981.

[11] L. M. Hocking. *Optimal Control. An Introduction to the Theory with Applications.* United States by Oxford University Press, New York, 1991.

[12] V. F. Krotov. Global methods in optimal control theory. *Marcel Dekker: Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, 1996.

[13] E. B. Lee and L. Markus. *Foundations of Optimal Control Theory.* Robert E. Krieger Publishing, Melbourne, 1986.

[14] G. Leitmann. *The Calculus of Variations and Optimal Control.* Springer Science & Business Media, New York, 1981.

[15] G. Leitmann and H. Stalford. A sufficiency theorem for optimal control. *J. Optimization Theory Appl.*, 8:169–174, 1971.

[16] J. Macki and A. Strauss. *Introduction to Optimal Control Theory.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[17] D. H. Martin. The essence of invexity. *Journal of Optimization Theory and Aplications*, 47:65–76, 1985.

[18] P. M. Mereau and W. F. Powers. A direct sufficient condition for free final time optimal control problems. *SIAM J. Control and Optimization*, 14:613–622, 1976.

[19] S. K. Mishra and G. Giorgi. *Nonconvex Optimization and its Applications. Invexity and Optimization.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

[20] D. W. Peterson and J. H. Zalkind. A review of direct sufficient conditions in optimal control theory. *Internat. J. Control*, 28:589–610, 1978.

[21] E. R. Pinch. *Optimal Control and the Calculus of Variations.* United States by Oxford University Press Inc., New York, 1993.

[22] A. Seierstad. Sufficient conditions in free final time optimal control problems. *SIAM J. Control and Optimization*, 26, No. 1:155–167, 1988.

[23] F. R. Villanueva. PM-pseudoinvexidade livre. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 2015.

[24] R. Vinter. *Optimal Control.* Birkhäuser, Boston, 2000.

Fabiola Roxana Villanueva, Carrera de Matemática, Universidad Mayor de San Andrés.
Av. Villazón 1995 – Monoblock Central UMSA Planta Baja del Edificio Viejo La Paz – Bolivia
E–mail: `fvillanueva@fcpn.edu.bo`

Valeriano Antunes de Oliveira, Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista (Unesp).
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Rua Cristóvão Colombo, N. 2265, Jardim Nazareth, CEP 15054–000, São José do Rio Preto, São Paulo – Brazil
E–mail: `valeriano.oliveira@unesp.br`