Revista Boliviana de Matemática 2(2): 163–171 (2023)
ISSN: 2791-3260 Versión impresa.
ISSN: 2957-8604 Versión en línea.
Instituto de Investigación Matemática
Universidad Mayor de San Andrés

Clasificación de los Endomorfismos Expansores

Oscar Bautista Callizaya

Instituto de Investigación Matemática, Universidad Mayor de San Andrés, Bolivia

Resumen

El principal objetivo de este trabajo es mostrar como el Teorema de Gromov [4] cierra la clasificación de los endomorfismos expansores, y dar una demostración alternativa de dicho teorema, recientemente propuesta por Terence Tao y Yehuda Shalom [6].

Palabras Clave: Sistemas dinamicos, endomorfismos expansores, teorema de Gromov.

1. Introducción

Actualmente, se sabe que todo endomorfismo expansor, definida en una variedad Riemanniana cerrada, conexa y orientada, es topológicamente conjugado a un infranil-endomorfismo. En este trabajo abordaremos el estudio de las clases de conjugación topológica de los endomorfismos expansores. Comenzaremos presentando algunas propiedades conocidas de los endomorfismos expansores dadas por Michael Shub en [7], donde, entre otros resultados, afirma que dos endomorfismos expansores son conjugados si sus homomorfismos inducidos son conjugados. Poco tiempo después, Michael Shub en [8] afirma que un endomorfismo expansor es conjugado a un Infranil-endomorfismo expansor si, y solo si, el grupo fundamental de la variedad compacta tiene un subgrupo nilpotente de índice finito.

Por otro lado, John Franks probó en [3] que si una variedad cerrada admite un endomorfismo expansor, entonces su grupo fundamental tiene crecimiento polinomial.

Un resultado muy importante debido a Mikhail Gromov [4], de naturaleza puramente algebraica, establece que si un grupo tiene crecimiento polinomial, entonces tiene un subgrupo nilpotente de índice finito, resultado que suprime la hipótesis de Michael Shub. Vale la pena mencionar que la prueba original de Mikhail Gromov, es bastante complicada, utilizó un límite infinito y explotó el trabajo relacionado con la solución del quinto problema de Hilbert [5].

Finalmente, en este trabajo presentaremos un breve esbozo de una demostración alternativa, del Teorema de Gromov, recientemente propuesta por Terence Tao y Yehuda Shalom en [6], considerablemente más sencilla, en el sentido que no es cuantitativo, pero ofrece una prueba autónoma y en gran medida elemental.

2. Endomorfismos expansores

En este trabajo M denotará una variedad Riemanniana C^∞ cerrada, conexa y orientada.

Un **endomorfismo** de M es una aplicación diferenciable $f\colon M \to M$ de clase C^r, con $r \geq 1$.

Definición 2.1. Un **endomorfismo expansor** es una aplicación diferenciable $f\colon M \to M$ para la cual existen constantes $c > 0$ y $\lambda > 1$ tales que

$$\|Df^m(x) \cdot v\|_{f^m(x)} \geq c\lambda^m \|v\|_x ,$$

para todo $x \in M$, para todo $v \in T_xM$ y todo $m > 0$.

Definición 2.2. Sean X y Y espacios topológicos, $f\colon X \to X$ y $g\colon Y \to Y$ aplicaciones continuas. Diremos que f y g son **topológicamente conjugadas** si existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$ tal que

$$h \circ f = g \circ h.$$

La aplicación h es llamada **conjugación**.

Veamos un resultado preliminar debido a Shub que describe las propiedades dinámicas y topológicas fundamentales de los endomorfismos expansores y de las variedades cerradas que admiten tales sistemas.

Teorema 2.1 ([7]-1969)**.** *Sea $f\colon M \to M$ un endomorfismo expansor, con M una variedad Riemanniana cerrada. Entonces*

- *a) f tiene al menos un punto fijo.*
- *b) Los puntos periódicos de f son densos en M.*
- *c) Para todo $V \subset M$ abierto no vacío, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $M = f^n(V)$.*
- *d) f es topológicamente transitivo, esto es, tiene una órbita densa.*
- *e) El recubrimiento universal de M es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*
- *f) El grupo fundamental $\Pi_1(M, p_0)$ es libre de torsión, esto es, no posee elementos de orden finito.*
- *g) $\chi(M) = 0$, donde $\chi(M)$ denota la característica de Euler de M.*

El siguiente resultado nos da condiciones necesarias y suficientes para que dos endomorfismos expansores sean conjugados.

Teorema 2.2 ([7]-1969)**.** *Sean M, N variedades Riemannianas cerradas, $g\colon N \to N$ y $f\colon M \to M$ endomorfismos expansores con $g(n_0) = n_0$ y $f(m_0) = m_0$. Entonces existe una biyección entre los homeomorfismos $h\colon N \to M$, tal que $h(n_0) = m_0$ y $f \circ h = h \circ g$, y el grupo de los isomorfismos $A\colon \Pi_1(N, n_0) \to \Pi_1(M, m_0)$, tal que el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_1(N,n_0) & \xrightarrow{A} & \Pi_1(M,m_0) \\
\Big\downarrow g_{\#} & & \Big\downarrow f_{\#} \\
\Pi_1(N,n_0) & \xrightarrow{A} & \Pi_1(M,m_0).
\end{array}$$

Tal correspondencia es dada por $h \mapsto h_{\#}$.

3. Ejemplos de endomorfismos expansores

Definición 3.1. Sea G un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo, con una métrica invariante por la izquierda y sea $H \subset G$ un subgrupo uniformemente discreto de G. La variedad G/H es llamada una **Nil-variedad** .

Sea $A\colon G \to G$ un automorfismo de grupos de Lie expansor, si $A(H) \subset H$, A define un endomorfismo $\overline{A}\colon G/H \to G/H$ expansor, el cual es llamado endomorfismo **nil-expansor**.

Un ejemplo particular de nil-variedad es el n-Toro. El Toro, $\mathbb{T}^n$, puede ser considerado como un cociente del grupo de Lie abeliano $\mathbb{R}^n$, por el subgrupo uniformemente discreto $\mathbb{Z}^n$, el subgrupo de todos los puntos tales que tienen todas las coordenadas enteras. Sea A una matriz $n \times n$, tal que todas las entradas de A sean enteras y todos los autovalores de A en módulo mayores que uno. A puede ser pensado como un automorfismo de grupos de Lie expansor de $\mathbb{R}^n$ tal que $A(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$. Entonces A proyecta un endomorfismo expansor de $\mathbb{T}^n$; $\overline{A}\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$. $\overline{A}$ es llamado un **endomorfismo linear expansor**.

Claramente, $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ la proyección natural de $\mathbb{R}^n$ en el toro $\mathbb{T}^n$, P es una aplicación de recubrimiento.

4. Infranil-variedades

Antes de pasar a definir una infranil-variedad recordemos que si G es un grupo de Lie, un subgrupo H de G se dice **cocompacto** en G, si G/H es un espacio compacto.

Sea G un grupo nilpotente, conexo y simplemente conexo. Denotemos por $\mathrm{Aut}(G)$ el grupo de automorfismos de Lie del grupo G. El grupo de **automorfismos afines de** G será denotado por $\mathrm{Aff}(G)$. Un elemento de $\mathrm{Aff}(G)$ es de la forma (g, c), donde $g \in G$ es la "parte de la traslación" y $c \in \mathrm{Aut}(G)$ su "parte linear". El elemento (g, c) actúa en G como automorfismos afines de la siguiente forma:

$$(g, c) \cdot x = gc(x), \quad \forall x \in G.$$

De esta forma, $\mathrm{Aff}(G)$ puede ser pensado como el producto semidirecto $\mathrm{Aut}(G) \ltimes G$ y G como un subgrupo normal de $\mathrm{Aff}(G)$.

Consideremos un subgrupo $H < \mathrm{Aff}(G)$ libre de torsión tal que $\Delta := H \cap G$ es discreto y cocompacto en G, y tal que el índice $[H : \Delta] < \infty$. De esta forma, H actúa naturalmente en G y el espacio de órbitas de esta acción, denotada por G/H, es naturalmente una variedad cerrada. Las variedades que pueden ser construidas de esta forma reciben el nombre de **infranil-variedad** (cerrada). Se puede mostrar que las infranil-variedades son finitamente recubiertas por nilvariedades.

Un ejemplo trivial de infranil-variedad es el n-toro $\mathbb{T}^n$. Un ejemplo más interesante, que no es una nilvariedad, es la llamada botella de Klein:

Ejemplo 4.1. La botella de Klein se define como la infranil-variedad G/H donde $G := \mathbb{R}^2$ y

$$H := \langle z \mapsto -z + (1,0); z \mapsto -z + (0,1)\rangle,$$

siendo que $\langle\cdot\rangle$ denota el subgrupo generado en $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$. Se puede mostrar que G/H es la base de un recubrimiento de grado 2 donde el espacio total es $\mathbb{T}^2$.

4.1. Construcción de la Infranil-Variedad. En este trabajo diremos que un grupo H esta **encajado** en otro grupo G si existe un homomorfismo inyectivo de H a G. Ahora, procedamos a construir la infranil-variedad.

Como $\Pi_1(M, m_0)$ es un grupo libre de torsión. Si además de eso, **suponemos que** $\Pi_1(M, m_0)$ **tiene un subgrupo nilpotente de índice finito,** entonces por un resultado de L. Auslander y E.Schenkman [2] pagina 786, podemos afirmar que $\Pi_1(M, m_0)$ admite un 'encajamiento' como subgrupo discreto cocompacto en $\mathrm{Aff}(G)$, con G grupo nilpontente, conexo y simplemente conexo. Más precisamente, existe $F < \mathrm{Aut}(G)$ finito y un 'encajamiento' $j\colon \Pi_1(M, m_0) \hookrightarrow G \ltimes F < \mathrm{Aff}(G)$ tal que la imagen de j es discreto y cocompacto en $G \ltimes F$.

Más aún, por L.Auslander [1] página 579, el homomorfismo inducido $f_\#\colon \Pi_1(M, m_0) \to \Pi_1(M, m_0)$ se extiende de forma única a un automorfismo $\widehat{A}\colon G \ltimes F \to G \ltimes F$ tal que $\widehat{A}(G) = G$ y $\widehat{A}|_{\Pi_1(M,m_0)} = f_\#$. Dando continuidad a la notación utilizada anteriormente, denotemos $A := \widehat{A}|_G\colon G \to G$ y $H := \Pi_1(M, m_0) < \mathrm{Aff}(G)$. Así, G/H es una infranil-variedad .

Teorema 4.1 ([3]-1968)**.** *El infranil-endomorfismo $\overline{A}\colon G/H \to G/H$ inducido dado por la construcción anterior es un endomorfismo expansor.*

Este tipo de infranil-endomorfismo expansor será llamado solamente por **infranil-expansor**. En este punto, es importante recordar que toda esta construcción fue hecha bajo la suposición de que $\Pi_1(M, m_0)$ tiene un subgrupo nilpotente de índice finito.

Ahora podemos enunciar el resultado preliminar dado por Shub:

Teorema 4.2 ([8]-1970)**.** *Sea $f\colon M \to M$ un endomorfismo expansor definido en una variedad compacta M. Entonces f es topológicamente conjugado a un infranil-endomorfismo expansor si, y solo si,* $\Pi_1(M, m_0)$ *tiene un subgrupo nilpotente de índice finito.*

5. Grupos de crecimiento polinomial

En vista del Teorema 4.2, es interesante analizar que tipos de grupos pueden ser el grupo fundamental de una variedad que admite endomorfismos expansores. Para esto precisamos algunas definiciones preliminares. A lo largo de la sección G denotará un grupo finitamente generado y Γ un subconjunto generador simétrico finito, es decir, Γ contiene los inversos de todos sus elementos.

Definición 5.1. Definimos **La longitud de un elemento** en G como

$$I_\Gamma(\gamma) := \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \gamma = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n, \alpha_i \in \Gamma\}.$$

Se puede definir una distancia en G relativo al conjunto Γ por

$$d_\Gamma(\gamma_1, \gamma_2) = I_\Gamma(\gamma_1^{-1}\gamma_2).$$

Se puede probar fácilmente que

Proposición 5.1. (G, d_Γ) *es un espacio métrico.*

Denotemos a bola de radio r y centrada en la identidad de G por $B_\Gamma(r)$, es decir,

$$B_\Gamma(r) = \{\gamma \in G \ : \ I_\Gamma(\gamma) < r\}.$$

También haremos uso da siguiente notación para representar a cardinalidad de un conjunto $\#(\cdot)$.

Definición 5.2. Diremos que G tiene **crecimiento polinomial** si existe un polinomio con coeficientes reales tal que

$$\#B_\Gamma(r) \leq P(r), \quad \forall r > 1. \tag{1}$$

$\#B_\Gamma(\cdot)$ es llamada la aplicación de crecimiento de G.

El menor grado de un polinomio $P(r)$ que satisface la estimativa (1), recibe el nombre de **índice de crecimiento** de G.

Es interesante destacar que estos conceptos son independientes del subconjunto de generadores Γ.

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 5.1 ([3]-1968)**.** *Sea M una variedad Riemanniana cerrada, conexa y orientable. Suponga que existe $f : M \to M$ un endomorfismo expansor. Entonces el grupo fundamental $\Pi_1(M, m_0)$ es finitamente generado y tiene crecimiento polinomial.*

6. Teorema de Gromov

Finalmente, presentamos el resultado principal de este trabajo:

Teorema 6.1 ([4]-1981)**.** *Sea G un grupo finitamente generado con crecimiento polinomial, entonces G tiene un subgrupo nilpotente de índice finito.*

Antes de ir a la demostración, veamos que siguiendo el Teorema 5.1 de Franks y usando el Teorema 6.1 de Gromov, podemos suprimir la hipótesis del Teorema 4.2 de Shub, para conseguir el siguiente resultado que cierra la clasificación de los endomorfismos expansores.

Teorema 6.2 ([4]-1981)**.** *Sea $f : M \to M$ un endomorfismo expansor definido en una variedad Riemanniana compacta M. Entonces f es topológicamente conjugado a un infranil-endomorfismo expansor.*

La prueba original del célebre teorema de Gromov [4] es bastante sofisticada. Aquí presentaremos un esbozo del argumento de Tao y Shalom. Comenzamos haciendo unas definiciones que serán las herramientas para la prueba.

Definición 6.1. Sea G un grupo generado por un conjunto finito Γ. Decimos que $F\colon G \to \mathbb{R}$ es una función **Armónica** si para todo x en G se tiene

$$F(x) = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\alpha \in \Gamma} F(x\alpha).$$

Definición 6.2. Una función $F\colon G \to \mathbb{R}$ es **Lipschitz** si existe $c > 0$ tal que para todo $x \in G$ y $\alpha \in \Gamma$ se tiene

$$|F(x) - F(x\alpha)| \leq c.$$

El argumento precisa de 4 ingredientes separados, resultados cuyas demostraciones son relativamente elementales y pueden ser encontradas en [6]. El primer ingrediente es la existencia de funciones armónicas y Lipschitz no constantes.

Teorema 6.3. *Sea G un grupo finitamente generado por un conjunto simétrico finito Γ. Entonces existe una función $f\colon G \to \mathbb{R}$ armónica y Lipschitz no constante.*

El segundo ingrediente es que no existen muchas funciones armónicas y Lipschitz.

Teorema 6.4. *Sea G un grupo de crecimiento polinomial, finitamente generado por un conjunto simétrico finito Γ. Entonces, el espacio vectorial V de las funciones armónicas y Lipschitz tiene dimensión finita.*

El tercer ingrediente es que el teorema de Gromov es verdad para el caso de grupos de Lie lineales compactos.

Teorema 6.5. *Sea G un subgrupo infinito de un grupo de Lie lineal compacto $H \subset GL_n(C)$ de crecimiento polinomial, donde C es cualquier espacio vectorial de dimensión n. Entonces G tiene un subgrupo abeliano de índice finito.*

El ingrediente final es que el teorema de Gromov es inductivamente verdadero una vez que existe un cociente cíclico finito.

Teorema 6.6. *Sea G un grupo de crecimiento polinomial, con índice de crecimiento d. Supongamos inductivamente que el teorema de Gromov es verdad para grupos de índice de crecimiento menor a d. Supongamos que G tiene un subgrupo de índice finito G' tal que existe un homomorfismo no trivial $f\colon G' \to Z$, donde Z es un grupo cíclico infinito. Entonces G tiene un subgrupo nilpotente de índice finito.*

Pasamos a demostrar un lema que será usado varias veces.

Lema 6.1. *Si G es finitamente generado y $H \subset G$ es un subgrupo de finito índice, entonces H es finitamente generado .*

Demostración. Sea $S = \{s_1, ..., s_r\}$ el generador simétrico de G, y $\{t_1H, ..., t_kH\}$ las clases a izquierda con $t_1 = e$, ahora para todo i, j tenemos que $s_i t_j = t_{k_{ij}} h_{ij}$ para algún $h_{ij} \in H$. Entonces $\{h_{ij}\}$ genera H, de hecho, sea $h \in H$

$$\begin{aligned} h &= s_{i_1} \cdots s_{i_l} = s_{i_1} \cdots s_{i_l} t_1 \\ &= s_{i_1} \cdots t_{k_{i_l 1}} h_{i_l 1} = ... = t_j h_{ij_1} \cdots h_{ij_r}, \end{aligned}$$

entonces $h \in H \cap t_j H$, eso solo sucede si $t_j = e$, así $h = h_{ij_1} \cdots h_{ij_r}$. $\square$

Ahora, tenemos todos los ingredientes completos para probar el Teorema de Gromov.

Demostración del Teorema 6.1. Asumimos que G es infinito, pues si es finito no tenemos nada que probar. Por el Teorema 6.3, V tiene funciones armónicas y Lipschitz no constantes, sea $C \subset V$ el subespacio vectorial de las funciones constantes. Denotemos

$$W = V/C.$$

Por el Teorema 6.4 V tiene dimensión finita, entonces también W.
Definamos una acción a izquierda (acción de G en V) definida como

$$\begin{aligned} \overline{\rho}\colon G &\to GL(V) \\ y &\mapsto \overline{\rho}(y), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{\rho}(y)\colon V &\to V \\ F &\mapsto F(y \cdot \_), \end{aligned}$$

está bien definida y claramente $\overline{\rho}(x \cdot y) = \overline{\rho}(x) \cdot \overline{\rho}(y)$. Como $\overline{\rho}(y)(C) = C$, entonces tiene sentido tomar la acción de G en W

$$\begin{aligned} \rho\colon G &\to GL(W) \\ y &\mapsto \rho(y), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \rho(y)\colon W &\to W \\ F &\mapsto [F(y \cdot \_)]. \end{aligned}$$

Sea la seminorma en V

$$\|F\|_* = \sup_{x \in G, \alpha \in \Gamma} |F(x) - F(x\alpha)|,$$

como $\|F\| = 0$ si, y solo si, $F \in C$. Entonces definimos una norma en W como sigue, para todo $[F] \in W$

$$\|[F]\| = \|F\|_*,$$

fácilmente, se muestra que está bien definido y es una norma. Además de eso $\|\cdot\|$ es preservada por la acción de G, es decir, para todo $y \in G$ y $[F] \in W$

$$\|\rho(y)([F])\| = \|[F]\|.$$

Si inducimos la norma a $GL(W)$, entonces para todo y en G, $\|\rho(y)\| = 1$, así $\rho(G)$ es limitado sea

$$H = \overline{\rho(G)} \subset GL(W),$$

así H es un subgrupo compacto de el grupo de Lie linear $GL(W)$. Así, por el Teorema 6.5 $\rho(G)$ tiene un subgrupo abeliano de índice finito sea $K \leq \rho(G)$. K es finitamente generado por el Lema 6.1. Además de eso $\rho^{-1}(K)$ tiene índice finito en G (basta notar que $\rho(\rho^{-1}(K)) = K$). Ahora nos dividimos en dos casos:

(i) Si K es infinito: Como K es finitamente generado y abeliano, entonces

$$K \approx \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{r_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{r_s},$$

entonces existe un homomorfismo sobreyectivo de $\rho^{-1}(K) \subset G$ sobre Z. Por tanto, por el Teorema 6.6, G tiene un subgrupo nilpotente de índice finito.

(ii) Si K es finito: Entonces $\{Id_W\}$ tiene índice finito en K, $G' = \rho^{-1}(Id_W)$ tiene índice finito en $\rho^{-1}(K)$, como $\rho^{-1}(K)$ tiene índice finito en G, entonces G' tiene índice finito en G. Ahora, como para todo y en G' $\rho(y)\colon W \to W$ es la identidad, para todo $[F]$ en W (escribamos $F(y \cdot \_) = F_y$), $F_y - F = c(y, F) = c_y(F)$ la diferencia y constante que depende de y y F, definimos

$$\begin{array}{rcl} \varrho\colon G' & \to & L(V) \\ y & \mapsto & c_y, \end{array}$$

es una representación aditiva, de hecho, sean $y, y' \in G'$, para todo $F \in V$ tenemos

$$\begin{array}{rcl} \varrho(yy')(F) & = & c_{yy'}(F) = F_{yy'} - F \\ & = & F_{yy'} - F_{y'} + F_{y'} - F = c_y(F_{y'}) + c_{y'}(F) \\ & = & c_y(F) + c_{y'}(F) = (\varrho(y) + \varrho(y'))(F). \end{array}$$

Nuevamente hacemos dos casos:

(a) Si $\varrho(G')$ es infinito: Como G' tiene índice finito en G, es finitamente generado por el Lema 6.1, entonces $\varrho(G')$ es finitamente generado (como grupo aditivo), como en el caso (i) existe un homomorfismo de G' sobre $\mathbb{Z}$, y por el Teorema 6.6 G tiene un subgrupo nilpotente de índice finito.
(b) Mostremos que $\varrho(G')$ no puede ser finito. De hecho, si $\varrho(G')$ es finito, $G'' = \varrho^{-1}$ tiene índice finito en G', entonces G'' tiene índice finito en G. Como G'' es trivial en $L(V)$, tenemos que para todo $y \in G''$, para todo $x \in G$ y para todo $F \in V$

$$F(yx) - F(x) = 0.$$

Escribamos $G = G''x_1 \sqcup ... \sqcup G''x_j$, se ve que $F \in V$ es constante en cada clase, así F tiene un máximo global. Sea z_0 un máximo global de F, entonces como $F(z_0) = \frac{1}{\#\Gamma}\Sigma_{\alpha\in\Gamma}F(z_0\alpha)$, tenemos que $F(z_0\alpha) = F(z_0)$ para todo $\alpha \in \Gamma$, así, F es constante, pero F es arbitrario, lo cual es un absurdo, Teorema 6.3. $\square$

7. Agradecimientos

Deseo agradecer a los revisores anónimos que corrigieron mis errores, convirtiendo la lectura de este texto más agradable. Al Proyecto Dinámicas de Control, donde puede desarrollar y comunicar mis conocimientos e ideas. Al apoyo del Instituto de Investigación Matemática IIMAT de la Facultad de Ciencias Puras y Naturales de la Universidad Mayor de San Andres.

Referencias

[1] L. Auslander, *Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroups of lie groups*, Annals of Mathematics, 71 (1960), pp. 579–590.

[2] L. Auslander and E. Schenkman, *Free groups, hirsch-plotkin radicals, and applications to geometry*, Proceedings of the American Mathematical Society, 16 (1965), pp. 784–788.

[3] J. Franks, *Anosov diffeomorphisms*, in Proceedings of the Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems, D. Chillingworth, ed., Berlin, Heidelberg, 1971, Springer Berlin Heidelberg, pp. 142–143.

[4] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps (with an appendix by jacques tits)*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 53 (1981), pp. 53–78.

[5] D. Montgomery and L. Zippin, *Topological transformation groups*, 1956.

[6] Y. Shalom and T. Tao, *A finitary version of gromov's polynomial growth theorem*, Geometric and Functional Analysis, 20 (2010), pp. 1502–1547.

[7] M. Shub, *Endomorphisms of compact differentiable manifolds*, American Journal of Mathematics, 91 (1969), pp. 175–199.

[8] ——, *Expanding maps*, American Mathematical Society, 14 (1970), pp. 273–276.

osbautistaca@gmail.com

O. Bautista, Instituto de Investigación Matemática, Universidad Mayor de San Andrés.
Calle 27 de Cota Cota, Campus Universitario, Edificio de Ciencias Puras y Naturales, 1er Piso. La Paz– Bolivia
*E-mail:*obautistac@fcpn.edu.bo