

# Observador global por modo deslizante basado en disipatividad para una clase de sistemas mecánicos inciertos

W. Alejandro Apaza-Perez<sup>1</sup>, Jaime A. Moreno<sup>2</sup>, Leonid Fridman<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Carrera de Matemática, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia*

<sup>2</sup> *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México*

<sup>3</sup> *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México*

---

## Resumen

En este artículo se propone un observador global por modo deslizante para una clase de sistemas mecánicos no lineales con dos grados de libertad. Para el diseño del observador, además de las fuerzas centrífugas y de Coriolis habituales, consideramos fricciones viscosas, fricciones secas inciertas y perturbaciones que no necesariamente se desvanecen. Por otro lado, no se requiere que el sistema tenga que satisfacer la propiedad entrada-estado-estado-acotado, lo que hace que el problema de diseño del observador sea aún más desafiante. Para esta clase de sistemas, se propone un observador por modo deslizante basado en la disipatividad, con una convergencia global de tiempo finito teóricamente exacta a las velocidades reales del sistema. La eficiencia del observador propuesto se valida mediante simulaciones con un sistema de péndulo rotatorio.

*Palabras Clave:* Sliding-mode observers, Velocity observers, Nonlinear observers, Dissipative observers.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los controladores en los sistemas mecánicos generalmente requiere información de la posición y la velocidad. A menudo, solo la posición está disponible, por lo cual se recurre al diseño de observadores. Un desafío en la construcción de observadores para estimar la velocidad en sistemas mecánicos son las no linealidades de las fuerzas de Coriolis, la presencia de incertidumbres y perturbaciones (U/P por sus siglas en inglés Uncertainties/Perturbations). Los observadores y diferenciadores por modo deslizante [13, 23, 6, 9, 15, 4, 18, 8] proporcionan una convergencia de tiempo finito teóricamente exacta a los estados reales del sistema a pesar de la presencia de las U/P acotadas cuando el sistema tiene la propiedad de “estrada-acotada estado-acotado” (BIBS por sus siglas en inglés de Bounded-Input Bounded-State) y, en consecuencia, son semiglobales. Para sistemas sin la propiedad BIBS, la presencia de Coriolis y fuerzas centrífugas incrementan

el desafío del diseño de observadores [13, 23, 6, 15] debido a sus términos cuadráticos en las velocidades.

En este artículo consideraremos una clase de sistemas mecánicos de dos grados de libertad (2-DOF por sus siglas en inglés Two-degree-of-freedom) con U/P acotadas, donde no se requiere la propiedad BIBS.

*Estado del arte y motivación:* 1) Si consideramos los sistemas con U/P arbitrarias que satisfacen las condiciones para la existencia de un observador, entre ellas la condición de grado relativo uno [11, 19], los observadores disipativos [16, 20], que incluyen a los observadores tradicionales como los observadores de alta ganancia y observadores Lipschitz, resultan ser eficiente para hacer frente a la restricción BIBS. Estos observadores son capaces de estimar global y exponencialmente los estados reales utilizando propiedades disipativas que podrían tener las no linealidades. Pero los sistemas mecánicos con U/P tienen grado relativo dos con respecto a la posición medida.

2) Hay muchos trabajos (ver por ejemplo [5, 14, 3, 22]) que tratan las no linealidades originadas por las fuerzas centrífugas y de Coriolis, ellos proporcionan observadores globales cuando el modelo del sistema mecánico es completamente conocido. A través de transformaciones de estado, los trabajos [3, 22] proponen observadores con una dimensión bastante alta, a saber,  $3n + 1$  y  $2n + 2$  respectivamente, donde  $n$  es la dimensión de la velocidad no medida. Por otro lado, los trabajos [5, 14] proponen observadores con la misma dimensión del sistema para una clase de sistemas mecánicos. Sin embargo, no se consideró el desafío de lidiar con fricciones viscosas y secas, U/P, y obtener una estimación teóricamente exacta de la velocidad.

3) Para superar la restricción BIBS y las no linealidades por la presencia de fuerzas centrífugas y Coriolis, en [1] se propone un observador global para sistemas mecánicos de un grado de libertad con U/P. La transformación de estado utilizada en [1] no es aplicable a los sistemas mecánicos de 2 grados de libertad. En [2] se considera una clase de sistema mecánico 2-DOF con U/P donde algunos componentes de la matriz de inercia requieren ser constantes. A diferencia de [2], el presente trabajo presenta una nueva metodología y transformación que flexibiliza las restricciones impuestas a la matriz de inercia y amplía la clase de sistemas mecánicos considerados. Para ilustrar este punto, el sistema de péndulo rotatorio no cumple con las condiciones requeridas por [2].

*Contribución principal.* En este trabajo se propone un observador global por modo deslizando basado en disipatividad para una clase de sistemas mecánicos 2-DOF con fuerzas centrífugas y Coriolis, fricciones secas y viscosas, y U/P acotadas. El observador no requiere la propiedad BIBS y sus parámetros se pueden obtener a partir de desigualdades factibles de matrices.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera. El planteamiento del problema se presenta en la Sección 2. La sección 3 presenta un diseño de observador y los principales resultados. La sección 4 ilustra la eficacia del observador propuesta a través de los resultados de la simulación utilizando el sistema de péndulo rotatorio. Todas las pruebas están en el apéndice.

*Notaciones.* A lo largo de este artículo utilizamos las siguientes notaciones: dado un término  $c \in \mathbb{R}$ , un vector  $v \in \mathbb{R}^n$ , una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , una función acotada  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $|c|$ ,  $sign(c)$  son el valor absoluto, función de signo del término  $c$  respectivamente;  $\|v\|$ ,  $sign(v)$  son la norma, función de signo por componentes del vector

$v$  respectivamente;  $|A|_d$ ,  $|A|_M$ ,  $|A|_m$ ,  $A_{ij}$  son el determinante, el valor propio más grande, el valor propio más pequeño, el componente  $ij$  de la matriz  $A$  respectivamente;  $[f(t)]$ ,  $\lfloor f(t) \rfloor$  son una cota superior, una cota inferior de  $f$  respectivamente.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere un sistema mecánico 2-DOF descrito por

$$(1) \quad M(x)\ddot{x} + C(x, \dot{x})\dot{x} + G(x) + B\psi(x, \dot{x}) + H\dot{x} + \Lambda \text{sign}(\dot{x}) = Du + \tilde{\delta}(t, x, \dot{x}),$$

donde  $x = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$  es la posición medida,  $M(x) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz de inercia,  $C(x, \dot{x})\dot{x}$  representa las fuerzas centrífugas y Coriolis,  $\psi$  es una función continua,  $B = [0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $H, \Lambda, D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $H\dot{x}$  denota la fricción viscosa,  $G(x)$  denota fuerzas gravitatorias,  $\Lambda \text{sign}(\dot{x})$  denota la fricción seca incierta,  $\tilde{\delta}(t, x, \dot{x})$  contiene otras U/P, y  $u \in \mathbb{R}^2$  es la entrada de control en el sistema mecánico.

El objetivo es diseñar un observador para el sistema (1) con convergencia global en tiempo finito y teóricamente exacta a los valores reales de velocidad en el sistema mecánico.

Considere la familia de sistemas (1), que además satisface las siguientes condiciones:

P-1 La matriz  $M(x)$  depende solo de la variable  $x_2$  como

$$M(x_2) = \begin{bmatrix} m_{11}(x_2) & m_{12}(x_2) \\ m_{12}(x_2) & m_{22}(x_2) \end{bmatrix}.$$

P-2 Existen dos constantes  $\varsigma_m > 0$ ,  $\varsigma_M > 0$  tales que para todo  $x_2 \in \mathbb{R}$

$$(2) \quad 0 < \varsigma_m I \leq M(x_2) \leq \varsigma_M I$$

se cumple, donde  $I$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ .

P-3 La perturbación/incertidumbre  $\tilde{\delta}(t, x, \dot{x})$  está acotada, es decir, existe una constante  $L_{\tilde{\delta}} > 0$  tal que  $\|\tilde{\delta}(t, x, \dot{x})\| \leq L_{\tilde{\delta}}$  se cumple.

P-4 Existe  $Q, S, R \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , con  $Q < 0$  tal que la no linealidad  $\Psi(x, z, h) := \psi(x, z) - \psi(x, z + h)$  es  $\{Q, S, R\}$ -disipativo, es decir,

$$\begin{bmatrix} \Psi(x, z, h) \\ h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi(x, z, h) \\ h \end{bmatrix} \geq 0$$

para todo  $x, z, h \in \mathbb{R}^2$ .

La condición P-1 generalmente se satisface con sistemas mecánicos que contienen dinámica rotacional, por ejemplo el sistema carro-péndulo [12], péndulo Furuta [17]. La mayoría de los sistemas mecánicos satisfacen la condición P-2 [21]. La condición P-3 es una condición estándar para la construcción del observador debido a que el sistema tiene grado relativo mayor a uno [11]. La condición P-4 es una propiedad de una clase de no linealidades, por ejemplo lo satisfacen las funciones de Lipschitz con respecto a la segunda componente.

En la familia de sistemas mecánicos 2-DOF (1), las entradas de la matriz de fuerzas centrífugas y Coriolis  $C(x, \dot{x}) = \begin{bmatrix} c_{21}^{c11} & c_{22}^{c12} \\ c_{21}^{c21} & c_{22}^{c22} \end{bmatrix}$  se define a partir de las entradas de  $M(x)$  a

través de los símbolos de Christoffel [21] como

$$(3) \quad c_{kj} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial m_{kj}(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial m_{ki}(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial m_{ij}(x)}{\partial x_k} \right) \dot{x}_i,$$

para  $k, j = 1, 2$ . Utilizando las relaciones de los símbolos de Christoffel (3) y la condición P-1, la matriz de las fuerzas centrífugas y Coriolis se reduce a

$$(4) \quad C(x, \dot{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m'_{11}(x_2)\dot{x}_2 & \frac{1}{2}m'_{11}(x_2)\dot{x}_1 + m'_{12}(x_2)\dot{x}_2 \\ -\frac{1}{2}m'_{11}(x_2)\dot{x}_1 & \frac{1}{2}m'_{22}(x_2)\dot{x}_2 \end{bmatrix}.$$

### 3. DISEÑO DEL OBSERVADOR Y RESULTADOS

**3.1. Transformación de estados para hacer frente al término de Coriolis.** Si el sistema (1) satisface las condiciones P1 y P2, entonces con las notaciones presentadas anteriormente y definiendo  $v = [v_1 \ v_2]^T = Du - G(x)$ ,  $\delta = [\delta_1 \ \delta_2]^T = \tilde{\delta} - \Lambda \text{sign}(\dot{x})$  el sistema (1) se expresa como

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{z} = M^{-1}(x)(v - C(x, z)z - Hz - B\psi(x, z) + \delta(t, x, z)). \end{cases}$$

El siguiente resultado está inspirado en una transformación propuesta en [14] que coincide para el caso  $H = 0$ ,  $\psi(x, z) = 0$ ,  $\tilde{\delta} = 0$ ,  $\Lambda = 0$ .

**Proposición 3.1.** *Si se satisfacen las condiciones P-1 y P-2, entonces el mapa  $T : (x_1, x_2, z_1, z_2) \mapsto (\theta_1, \theta_2, w_1, w_2)$ , con*

$$(6) \quad \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \int_0^{x_2} \frac{m_{12}(s)}{m_{11}(s)} ds \\ x_2 \\ m_{11}(x_2)z_1 + m_{12}(x_2)z_2 + h_{11}x_1 + h_{12}x_2 \\ \alpha(x_2)z_2 \end{bmatrix}$$

donde  $\alpha(x_2) = \sqrt{\frac{|M(x_2)|_d}{m_{11}(x_2)}}$ , define un difeomorfismo global que transforma el sistema (5) en el siguiente sistema

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{w_1 - h_{11}\tilde{\theta} - h_{12}\theta_2}{m_{11}(\theta_2)}, \\ \dot{w}_1 &= v_1 + \delta_1, \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{w_2}{\alpha(\theta_2)}, \\ \dot{w}_2 &= g(\theta, w_1) + \frac{\vartheta_0}{\alpha(\theta_2)} + \frac{\vartheta_1}{\alpha(\theta_2)}w_2 + \frac{\vartheta_\delta}{\alpha(\theta_2)} - \frac{\psi(x, \varpi)}{\alpha(\theta_2)}, \\ Y &= (\theta_1, \theta_2)^T. \end{aligned}$$

donde  $\tilde{\theta} = \theta_1 - \int_0^{\theta_2} \frac{m_{12}(s)}{m_{11}(s)} ds$ ,  $\theta = [\theta_1]$ ,  $w = [w_1]$ ,  $v = [v_1]$ ,  $\Upsilon_{\theta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{11}(\theta_2)} & -\frac{m_{12}(\theta_2)}{m_{11}(\theta_2)\alpha(\theta_2)} \\ 0 & \frac{1}{\alpha(\theta_2)} \end{bmatrix}$ ,  $\vartheta_0 = v_2 - \frac{m_{12}(\theta_2)v_1}{m_{11}(\theta_2)}$ ,  $\vartheta_1 = \frac{h_{12}m_{12}(\theta_2)}{m_{11}(\theta_2)\alpha(\theta_2)} - \frac{h_{22}}{\alpha(\theta_2)} + \frac{h_{21}m_{12}(\theta_2)}{\alpha(\theta_2)m_{11}(\theta_2)} - \frac{h_{11}m_{12}(\theta_2)^2}{m_{11}(\theta_2)^2\alpha(\theta_2)}$ ,  $\vartheta_\delta = \delta_2 - \frac{m_{12}(\theta_2)\delta_1}{m_{11}(x_2)}$ ,

$$\varpi = \Upsilon_{\theta_2} w - \begin{bmatrix} \frac{h_{11}\tilde{\theta} + h_{12}\theta_2}{m_{11}(\theta_2)} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad g(\theta, w_1) = \frac{m'_{11}(\theta_2)}{2m_{11}^2(\theta_2)\alpha(\theta_2)} \left( w_1 - h_{11}\tilde{\theta} - h_{12}\theta_2 \right)^2 + \left( \frac{h_{11}m_{12}(\theta_2)}{m_{11}^2(\theta_2)\alpha(\theta_2)} - \frac{h_{21}}{m_{11}(\theta_2)} \right) \left( w_1 - h_{11}\tilde{\theta} - h_{12}\theta_2 \right). \quad \Delta$$

La prueba de la Proposición 3.1 se encuentra en el Apéndice B. Una característica esencial del sistema (7) es que es triangular con respecto a las variables no medidas  $w_1, w_2$ : el subsistema  $(\theta_1 - w_1)$  no depende de  $w_2$ . Esta estructura nos permite considerar primero la construcción de un observador para el subsistema correspondiente a las dos primeras ecuaciones del sistema (7):

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{\theta}_1 &= \frac{w_1 - h_{11}\tilde{\theta} - h_{12}\theta_2}{m_{11}(\theta_2)}, \\ \dot{w}_1 &= v_1 + \delta_1. \end{cases}$$

Por separado, podemos determinar un observador globalmente convergente de tiempo finito y exacto para este subsistema. Además se mantiene el principio de separación y tenemos el siguiente resultado

**Proposición 3.2.** *El sistema*

$$(9a) \quad \begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \frac{\hat{w}_1 - h_{11}\tilde{\theta} - h_{12}\theta_2}{m_{11}(\theta_2)} - \frac{k_{o1}}{m_{11}(\theta_2)} \phi_{11}(e_{\theta_1}), \\ \dot{\hat{w}}_1 = v_1 - \frac{k_{o2}}{m_{11}(\theta_2)} \phi_{12}(e_{\theta_1}), \end{cases}$$

es un observador global de tiempo finito del sistema (8), donde  $e_{\theta_1} = \hat{\theta}_1 - \theta_1$  y los términos no lineales de corrección se definen como

$$(9b) \quad \begin{aligned} \phi_{11}(e_{\theta_1}) &:= \mu_{11} [e_{\theta_1}]^{1/2} + \mu_{12} [e_{\theta_1}], \\ \phi_{12}(e_{\theta_1}) &:= \frac{\mu_{11}^2}{2} [e_{\theta_1}]^0 + \frac{3\mu_{11}\mu_{12}}{2} [e_{\theta_1}]^{1/2} + \mu_{12}^2 [e_{\theta_1}], \end{aligned}$$

si los parámetros  $k_{o1}, k_{o2}, \mu_{11}$  y  $\mu_{12}$  satisfacen la siguiente desigualdad matricial factible

$$(10) \quad \begin{bmatrix} P_1 A_1 + A_1^T P_1 + \gamma_1 \Gamma_1 \tilde{B}^T \tilde{B} + \epsilon I & \star \\ B^T P_1 & -\gamma_1 \mu_{11}^4 \end{bmatrix} < 0,$$

con  $0 < P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} -k_{o1} & 1 \\ -k_{o2} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\gamma_1 > 0$ , and  $\Gamma_1 = 4L_{\delta_1}^2 [m_{11}(\theta_2)]^2$ . Δ

La prueba de la Proposición 3.2 se encuentra en el Apéndice C.

**Observación 3.1.** *Note que a través del difeomorfismo en (6), se tiene que las nuevas variables  $\theta_1$  y  $\theta_2$  dependen de las variables medibles  $x_1$  y  $x_2$ , por lo cual las variables  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son medibles, así esas variables pueden ser usados en el observador (9a). El término  $m_{11}(\theta_1)$  es estrictamente positivo y acotado para todo valor de  $\theta_2$ , debido a la condición P2, y esto permite garantizar la convergencia del observador. La elección de los parámetros del observador propuesto 9 son obtenidos a partir de resolver la desigualdad matricial no lineal 10, y se garantiza la existencia de soluciones de esta desigualdad matricial no lineal.*

**Observador propuesto.** Ahora considere el siguiente sistema

$$(11a) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_1 &= \frac{\hat{w}_1 - h_{11}\tilde{\theta} - h_{12}\theta_2}{m_{11}(\theta_2)} - \frac{k_{o1}}{m_{11}(\theta_2)}\phi_{11}(e_{\theta_1}), \\ \dot{\hat{w}}_1 &= v_1 - \frac{k_{o2}}{m_{11}(\theta_2)}\phi_{12}(e_{\theta_1}), \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \frac{\hat{w}_2}{\alpha(\theta_2)} - \frac{l_{o1}\phi_{21}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)}, \\ \dot{\hat{w}}_2 &= g(\theta, \hat{w}_1) + \frac{\vartheta_0}{\alpha(\theta_2)} + \frac{\vartheta_1}{\alpha(\theta_2)}\hat{w}_2 + \frac{(-\psi(x, \hat{w} + \Upsilon_{\theta_2}k_{ol}\phi_1(e_{\theta})))}{\alpha(\theta_2)} - \frac{l_{o2}\phi_{22}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)}, \end{aligned}$$

donde  $e_{\theta_1} = \hat{\theta}_1 - \theta_1$ ,  $e_{\theta_2} = \hat{\theta}_2 - \theta_2$ ,  $\hat{w} = \Upsilon_{\theta_2}\hat{w} - \left[ \frac{h_{11}\tilde{\theta} + h_{12}\theta_2}{m_{11}(\theta_2)} \ 0 \right]^T$ ,  $k_{ol} = \begin{bmatrix} k_{o3} & 0 \\ 0 & l_{o3} \end{bmatrix}$ ,  $\phi_1(\theta) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(e_{\theta_1}) \\ \phi_{21}(e_{\theta_2}) \end{bmatrix}$ , y los términos no lineales de corrección son dados por

$$(11b) \quad \begin{aligned} \phi_{i1}(e_{\theta_i}) &:= \mu_{i1}[e_{\theta_i}]^{1/2} + \mu_{i2}[e_{\theta_i}], \\ \phi_{i2}(e_{\theta_i}) &:= \frac{\mu_{i1}^2}{2}[e_{\theta_i}]^0 + \frac{3\mu_{i1}\mu_{i2}}{2}[e_{\theta_i}]^{1/2} + \mu_{i2}^2[e_{\theta_i}], \end{aligned}$$

para  $i = 1, 2$ . Los estados estimados en coordenadas iniciales para (5) vienen dados por

$$(12) \quad \begin{aligned} \hat{x}_1 &= \theta_1 - \int_0^{\theta_2} \frac{m_{12}(s)}{m_{11}(s)} ds, \\ \hat{x}_2 &= \theta_2, \\ \hat{z}_1 &= \frac{\hat{w}_1 - \frac{m_{12}(\theta_2)}{\alpha(\theta_2)}\hat{w}_2 - h_{11}\tilde{\theta} - h_{12}\theta_2}{m_{11}(\theta_2)}, \\ \hat{z}_2 &= \frac{\hat{w}_2}{\alpha(\theta_2)}. \end{aligned}$$

Las ganancias (parámetros) de diseño para el observador propuesto son

$$(13) \quad k_{o1}, k_{o2}, l_{o1}, l_{o2}, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22} > 0; k_{o3}, l_{o3} \in \mathbb{R}.$$

**Teorema 3.1.** *El sistema (11) es un observador global de tiempo finito para el sistema (7) y los estados de estimación (12) convergen globalmente y en tiempo finito al vector de velocidad  $z$  del sistema (5), siempre que los parámetros positivos en (13) se elijan de las desigualdades matriciales factibles (10) y*

$$(14) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{H} + \epsilon I & \star & \star & \star \\ B^T P_2 & -\gamma_2 \mu_{21}^4 & \star & \star \\ B^T P_2 & 0 & -\gamma_3 \mu_{22}^2 & \star \\ B^T P_2 & 0 & 0 & -\gamma_4 \mu_{m2}^2 \end{bmatrix} < 0,$$

donde  $\mathcal{H} = P_2 A_2 + A_2^T P_2 + \gamma_2 \Gamma_2 \tilde{B}^T \tilde{B} + \gamma_3 \Gamma_3 B B^T + \gamma_4 \Gamma_4 \tilde{\Delta}_2$ ,  $0 < P_2 = P_2^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} -l_{o1} & 1 \\ -l_{o2} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 > 0$ , and  $\Gamma_1 = 4L_{\delta_1}^2 [m_{11}(\theta_2)]^2$ ,

$$\Gamma_2 = 4 \left[ \left| \frac{m_{11}(\theta_2)\delta_2 - m_{12}(\theta_2)\delta_1}{m_{11}(\theta_2)} \right| \right]^2, \quad \Gamma_3 = 4[\vartheta_1]^2, \quad \Gamma_4 = 4\Gamma_{R0}^2 [|\Upsilon_{\theta_2}^T \Upsilon_{\theta_2}|_M], \quad \tilde{\Delta}_2 = \begin{bmatrix} \ell_{03} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_{03} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{R0} = \frac{\sqrt{-q|R|_M + |S^T S|_M + |S^T S|_M^{1/2}}}{-q}. \quad \Delta$$

El observador (11) conserva la estructura del sistema transformado con términos de corrección no lineales (11b). Estos términos aparecen de forma aditiva en el sistema y también dentro de la no linealidad  $\psi$ . El término discontinuo  $[e_{\theta_i}]^0 = \text{sign}(e_{\theta_i})$  asegura la robustez del observador contra U/P acotadas y los otros términos en las no linealidades aseguran la convergencia en tiempo finito a los estados reales. Nótese además que los resultados propuestos no consideran el caso de ruidos en la medición, este análisis se propone para trabajos futuros. La prueba del Teorema 3.1 está en el Apéndice D.

#### 4. EJEMPLO: PÉNDULO ROTATORIO INVERTIDO

El observador propuesto es evaluado en un sistema de péndulo rotatorio invertido (RIP por sus siglas en inglés Rotatory Inverted Pendulum) que se describe en [10], ver Figura 1.

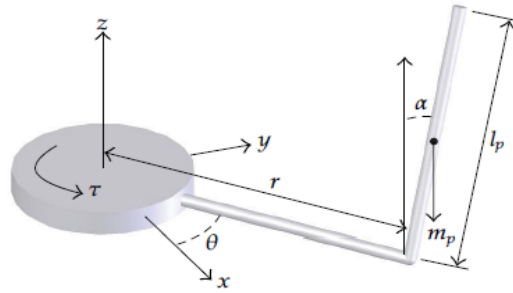


FIGURA 1. Vista esquemática del sistema RIP.

El modelo matemático no lineal del RIP, considerando el diagrama representado en la Figura 1, es dado en [10]:

$$(15) \quad (a + b \sin^2(\alpha)) \ddot{\theta} + (c \cos(\alpha)) \ddot{\alpha} - (c \sin(\alpha)) \dot{\alpha}^2 + (b \sin(2\alpha)) \dot{\alpha} \dot{\theta} + f \dot{\theta} + g \text{sign}(\dot{\theta}) + h \theta = i u,$$

$$b \ddot{\alpha} + (c \cos(\alpha)) \ddot{\theta} - (b \sin(\alpha) \cos(\alpha)) \dot{\theta}^2 - d \sin(\alpha) + e \dot{\alpha} = 0.$$

donde los estados representan,  $\theta \equiv$  posición angular del brazo [rad],  $\alpha \equiv$  posición angular del péndulo [rad]. Además,  $u$  es la entrada de control [N]. En el cuadro 1 se muestran los parámetros del péndulo rotatorio invertido dados en [10]:

**4.1. Selección de parámetros del observador.** Escribiendo el sistema (15) en la forma (1) con  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \alpha$ , se obtiene

$$M(x_2) = \begin{bmatrix} a + b \sin^2(x_2) & c \cos(x_2) \\ c \cos(x_2) & b \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} h x_1 \\ -d \sin(x_2) \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix},$$

Parámetros	Valores	Parámetros	Valores
$a$	3,29	$f$	14,283
$b$	0,1252	$g$	1,4286
$c$	0,2369	$h$	1,72
$d$	6,052	$i$	141,32
$e$	0,0132		

CUADRO 1. Parámetros del sistema RIP.

$C(x) = \begin{bmatrix} \frac{b}{2} \sin(2x_2) \dot{x}_2 & \frac{b}{2} \sin(2x_2) \dot{x}_1 - c \sin(x_2) \dot{x}_2 \\ -b \sin(x_2) \cos(x_2) \dot{x}_1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , donde se cumplen las condiciones P-1 y P-2. Tenga en cuenta que el sistema mecánico (15) no puede ser considerado por [2] porque el primer componente de la matriz de inercia  $M(x_2)$  depende del estado  $x_2$ . Tenemos  $\alpha(x_2) = \sqrt{\frac{b(a+b\sin^2(x_2))-c^2\cos^2(x_2)}{a+b\sin^2(x_2)}}$  y

$$\Upsilon_{x_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a+b\sin^2(x_2)} & -\frac{c\cos(x_2)}{(a+b\sin^2(x_2))\alpha(x_2)} \\ 0 & \frac{1}{\alpha(x_2)} \end{bmatrix}.$$

De la Proposición 3.1, tenemos el siguiente cambio de coordenadas

$$(16) \quad \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \frac{c \arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}} \sin(x_2)\right)}{\sqrt{ab}} \\ x_2 \\ (a + b \sin^2(x_2)) z_1 + c \cos(x_2) z_2 + f x_1 \\ \sqrt{\frac{b(a+b\sin^2(x_2))-c^2\cos^2(x_2)}{a+b\sin^2(x_2)}} z_2 \end{bmatrix}$$

que transforma (15), donde el observador propuesto viene dado por

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_1 &= \frac{\hat{w}_1 - f\tilde{\theta}}{a + b \sin^2(\theta_2)} - \frac{k_{o1}}{a + b \sin^2(\theta_2)} \phi_{11}(e_{\theta_1}), \\ \dot{\hat{w}}_1 &= v_1 - \frac{k_{o2}}{a + b \sin^2(\theta_2)} \phi_{12}(e_{\theta_2}), \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \frac{\hat{w}_2}{\alpha(\theta_2)} - \frac{l_{o1} \phi_{21}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)}, \\ \dot{\hat{w}}_2 &= g(\theta, \hat{w}_1) + \frac{\vartheta_0}{\alpha(\theta_2)} + \frac{\vartheta_1}{\alpha(\theta_2)} \hat{w}_2 - \frac{l_{o2} \phi_{22}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)}, \end{aligned}$$

$$\text{con } \tilde{\theta} = \theta_1 - \frac{c \arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}} \sin(\theta_2)\right)}{\sqrt{ab}}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iu - hx_1 \\ d \sin(x_2) \end{bmatrix}, \quad \vartheta_0 = v_2 - \frac{m_{12}(\theta_2)v_1}{m_{11}(\theta_2)}, \quad \vartheta_1 = -\frac{e}{\alpha(\theta_2)} - \frac{fc^2\cos^2(\theta_2)}{[a+b\sin(\theta_2)]^2\alpha(\theta_2)}, \quad g(\theta, \hat{w}_1) = \frac{b\sin(2\theta_2)}{2[a+b\sin^2(\theta_2)]^2\alpha(\theta_2)} \left( \hat{w}_1^2 - 2f\tilde{\theta}\hat{w}_1 + (f\tilde{\theta})^2 \right) + \frac{fc\cos(\theta_2)(w_1 - f\tilde{\theta})}{(a+b\sin^2(\theta_2))^2\alpha(\theta_2)}.$$

De las desigualdades matriciales (10) y (14) con control  $u = 1[N]$ , obtenemos  $P_1 = \begin{bmatrix} 12,696 & -3,5329 \\ -3,5329 & 1,3745 \end{bmatrix}$ ;  $P_2 = \begin{bmatrix} 5,7238 & -1,803 \\ -1,803 & 1,5815 \end{bmatrix}$ ;  $k_{o1} = 9,3286$ ;  $k_{o2} = 31,3087$ ;  $l_{o1} = 2,3437$ ;  $l_{o2} = 5,7371$ ;  $\mu_{11} = 3$ ,  $\mu_{12} = 3$ ,  $\mu_{21} = 3$ ,  $\mu_{22} = 10$ ;  $\epsilon = 1,43$ ;  $\gamma_1 = 0,0228$ ;  $\gamma_2 = 0,001$ ;



$\gamma_3 = 0,8554$ , y los valores de los parámetros  $L_{\delta_1} = 1,5$ ,  $\Gamma_1 = 173,5308$ ,  $\Gamma_2 = 1,008$ ,  $\Gamma_3 = 0,0529$ ,  $\Gamma_4 = 0$ .

Para los resultados numéricos que se reportan a continuación incluimos un ruido en la medición de posiciones con magnitud menor a 0,05. En la Figura 2, mostramos una simulación del sistema (15) utilizando el observador propuesto (17) que se basa en la transformación (16) en el siguiente escenario: los valores iniciales de  $(x_1, x_2, z_1, z_2)$  y  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{z}_1, \hat{z}_2)$  son  $(0, 4, 8, 12)$  y  $(-10, -8, -6, -4)$  respectivamente. Los estados estimados convergen en tiempo finito a estados reales antes del 1 [s].

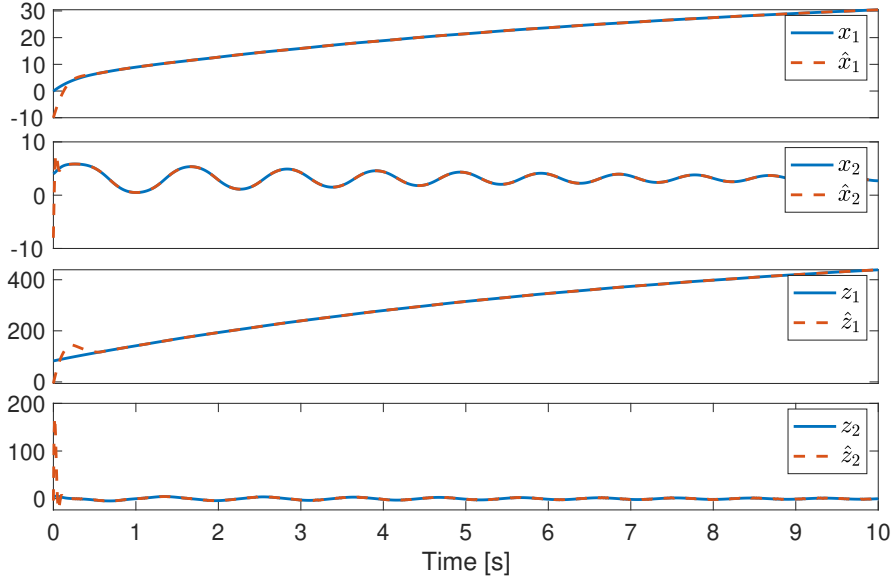


FIGURA 2. Trayectorias simuladas del sistema 15 y el observador propuesto dado por (11)-(12)

## 5. CONCLUSIONES

En este artículo proponemos un observador por modo deslizante basado en disipatividad con convergencia global teóricamente exacta y en tiempo finito a los valores reales de las velocidades para una clase de sistemas mecánicos de 2 grados de libertad. Esta clase de sistemas no requiere tener la propiedad BIBS y contiene fuerzas centrífugas y Coriolis, fricciones secas y viscosas, incertidumbres/perturbaciones. Las ganancias del observador propuesto se obtienen a partir de desigualdades matriciales factibles. El observador propuesto se ilustra en un sistema de péndulo rotatorio. A partir de los resultados obtenidos, se propone el problema de ruidos en la medición para trabajos futuros junto a la extensión a sistemas mecánicos de  $n$ -grados de libertad.

## APÉNDICE A. RESULTADOS PREVIOS

**Definición A.1** ([20]). Una no linealidad variante en el tiempo  $\gamma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\gamma(t, v)$ , continua por tramos en  $t$ , localmente Lipschitz en  $v$  y  $\gamma(t, 0) = 0$ , se llama

$\{Q, S, R\}$ -disipativa si para cada  $t \geq 0$  y  $v \in \mathbb{R}^p$  lo siguiente

$$(18) \quad \omega(\gamma(t, v), v) = \begin{bmatrix} \gamma(t, v) \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma(t, v) \\ v \end{bmatrix} \geq 0,$$

donde  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $R = R^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , se cumple.

**Lema A.1** ([1]). Si una  $\gamma(t, v)$  de no linealidad es  $\{Q, S, R\}$ -disipativa con  $Q$  una matriz definida negativa, entonces  $\gamma(t, v)$  es  $\{Q, 0, \tilde{R}\}$ -disipativa y

$$(19) \quad \|\gamma\| \leq \Gamma_{R0} \|v\|$$

donde  $\Gamma_{R0} = \frac{\sqrt{-|R|_M |Q|_M + |S^T S|_M + |S^T S|_M^{1/2}}}{-|Q|_M}$ ,  $\tilde{R} = -|Q|_M \Gamma_{R0}^2 I_p$ , y  $I_p$  es la identidad de la matriz  $p \times p$ .

## APÉNDICE B. PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 3.1.

De la condición P-2, la función  $T$  definida en (6) es una función biyectiva y diferenciable donde su función inversa  $T^{-1} : (\theta_1, \theta_2, w_1, w_2) \mapsto (x_1, x_2, z_1, z_2)$  viene dado por

$$(20) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \theta_2 \\ \frac{w_1 - \frac{m_{12}(\theta_2)}{\alpha(\theta_2)} w_2 - h_{11} \tilde{\theta} - h_{12} \theta_2}{m_{11}(\theta_2)} \\ \frac{w_2}{\alpha(\theta_2)} \end{bmatrix},$$

que es diferenciable, donde  $\tilde{\theta} = \theta_1 - \int_0^{\theta_2} \frac{m_{12}(s)}{m_{11}(s)} ds$  y  $\alpha(\theta_2) = \sqrt{\frac{|M(\theta_2)|_d}{m_{11}(\theta_2)}}$ .

Por lo tanto la función  $T$  es un difeomorfismo global. La matriz jacobiana se define como  $J(T) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$ , donde  $T_{11} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{m_{12}(x_2)}{m_{11}(x_2)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $T_{12} = 0_{2 \times 2}$ ,  $T_{22} = \begin{bmatrix} m_{11}(x_2) & m_{12}(x_2) \\ 0 & \alpha(x_2) \end{bmatrix}$ ,  $T_{21} = \begin{bmatrix} h_{11} & m'_{11}(x_2) z_1 + m'_{12}(x_2) z_2 + h_{12} \\ 0 & \alpha'(x_2) z_2 \end{bmatrix}$ , y  $\alpha'(x_2) = \frac{1}{2\alpha(x_2)} \left( m'_{22}(x_2) - \frac{2m_{12}(x_2)m'_{12}(x_2)}{m_{11}(x_2)} + \frac{m_{12}^2(x_2)m'_{11}(x_2)}{m_{11}^2(x_2)} \right)$ .

La derivada con respecto al tiempo  $t$  en  $\theta = [\theta_1 \ \theta_2]^T$ ,  $w = [w_1 \ w_2]^T$  usando (5) y (6) es dado por

$$\dot{\theta} = T_{11} z,$$

$$\dot{w} = [T_{21} - T_{22} M^{-1}(x_2) (C(x, z) + H)] z + T_{22} M^{-1}(x_2) [v - B\psi(x, z) + \delta(t, x, z)].$$

Note que

- $M^{-1}(x_2) = \frac{1}{|M(x_2)|_d} \begin{bmatrix} m_{22}(x_2) & -m_{12}(x_2) \\ -m_{12}(x_2) & m_{11}(x_2) \end{bmatrix}$ ,
- $T_{22} M^{-1}(x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{m_{12}(x_2)\alpha(x_2)}{|M(x_2)|_d} & \frac{m_{11}(x_2)\alpha(x_2)}{|M(x_2)|_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{m_{12}(x_2)}{m_{11}(x_2)\alpha(x_2)} & \frac{1}{\alpha(x_2)} \end{bmatrix}$ ,
- $T_{22} M^{-1}(x_2) (C(x, z) + H) = \begin{bmatrix} \varsigma_1 & \varsigma_2 \\ \varsigma_3 & \varsigma_4 \end{bmatrix}$ ,

del cual  $\varsigma_1 = \frac{1}{2} m'_{11}(x_2) z_2 + h_{11}$ ,  $\varsigma_2 = \frac{1}{2} m'_{11}(x_2) z_1 + m'_{12}(x_2) z_2 + h_{12}$ ,

$$\varsigma_3 = -\frac{m_{12}(x_2) (\frac{1}{2} m'_{11}(x_2) z_2 + h_{11})}{m_{11}(x_2) \alpha(x_2)} + \frac{-\frac{1}{2} m'_{11}(x_2) z_1 + h_{21}}{\alpha(x_2)},$$

$$\varsigma_4 = -\frac{m_{12}(x_2) (\frac{1}{2} m'_{11}(x_2) z_1 + m'_{12}(x_2) z_2 + h_{12})}{m_{11}(x_2) \alpha(x_2)} + \frac{\frac{1}{2} m'_{22}(x_2) z_2 + h_{22}}{\alpha(x_2)}.$$

$$\blacksquare T_{21} - T_{22}M^{-1}(x_2) (C(x, z) + H) = \begin{bmatrix} \iota_1 & \iota_2 \\ \iota_3 & \iota_4 \end{bmatrix},$$

$$\text{donde } \iota_1 = -\frac{1}{2}m'_{11}(x_2)z_2, \iota_2 = \frac{1}{2}m'_{11}(x_2)z_1, \iota_3 = \frac{m_{12}(x_2)(\frac{1}{2}m'_{11}(x_2)z_2+h_{11})}{m_{11}(x_2)\alpha(x_2)} - \frac{-\frac{1}{2}m'_{11}(x_2)z_1+h_{21}}{\alpha(x_2)},$$

$$\begin{aligned} \iota_4 &= \alpha'(x_2)z_2 + \frac{m_{12}(x_2) \left( \frac{1}{2}m'_{11}(x_2)z_1 + m'_{12}(x_2)z_2 + h_{12} \right)}{m_{11}(x_2)\alpha(x_2)} - \frac{\frac{1}{2}m'_{22}(x_2)z_2 + h_{22}}{\alpha(x_2)} \\ &= \frac{m_{12}^2(x_2)m'_{11}(x_2)}{2m_{11}^2(x_2)\alpha(x_2)} z_2 + \frac{m_{12}(x_2)m'_{11}(x_2)}{2m_{11}(x_2)\alpha(x_2)} z_1 + \frac{h_{12}m_{12}(x_2)}{m_{11}(x_2)\alpha(x_2)} - \frac{h_{22}}{\alpha(x_2)}. \end{aligned}$$

$$\blacksquare [T_{21} - T_{22}M^{-1}(x_2) (C(x, z) + H)] z = \begin{bmatrix} 0 \\ g(\theta, w_1) + \frac{\vartheta_1}{\alpha(\theta_2)}w_2 \end{bmatrix}, \text{ debido a que } \iota_1 z_1 + \iota_2 z_2 = 0 \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \iota_3 z_1 + \iota_4 z_2 &= \frac{m_{12}(x_2)m'_{11}(x_2)}{2m_{11}(x_2)\alpha(x_2)} z_1 z_2 + \frac{h_{11}m_{12}(x_2)}{m_{11}(x_2)\alpha(x_2)} z_1 + \frac{m'_{11}(x_2)}{2\alpha(x_2)} z_1^2 - \frac{h_{21}}{\alpha(x_2)} z_1 \\ &\quad + \frac{m_{12}^2(x_2)m'_{11}(x_2)}{2m_{11}^2(x_2)\alpha(x_2)} z_2^2 + \frac{m_{12}(x_2)m'_{11}(x_2)}{2m_{11}(x_2)\alpha(x_2)} z_1 z_2 + \frac{h_{12}m_{12}(x_2)}{m_{11}(x_2)\alpha(x_2)} z_2 - \frac{h_{22}}{\alpha(x_2)} z_2 \\ &= \frac{m'_{11}(x_2)}{2m_{11}^2(x_2)\alpha(x_2)} (m_{11}(x_2)z_1 + m_{12}(x_2)z_2)^2 + \left( \frac{h_{11}m_{12}(x_2)}{m_{11}(x_2)\alpha(x_2)} - \frac{h_{21}}{\alpha(x_2)} \right) z_1 \\ &\quad + \left( \frac{h_{12}m_{12}(x_2)}{m_{11}(x_2)\alpha(x_2)} - \frac{h_{22}}{\alpha(x_2)} \right) z_2 \end{aligned}$$

de (6), tenemos que  $m_{11}(x_2)z_1 + m_{12}(x_2)z_2 = w_1 - h_{11}\tilde{\theta} - h_{12}\theta_2$ , y de (20), obtenemos

$$\begin{aligned} &= \frac{m'_{11}(x_2)}{2m_{11}^2(x_2)\alpha(x_2)} \left( w_1 - h_{11}\tilde{\theta} - h_{12}\theta_2 \right)^2 + \left( \frac{h_{11}m_{12}(x_2)}{m_{11}(x_2)\alpha(x_2)} - \frac{h_{21}}{\alpha(x_2)} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( \frac{w_1 - \frac{m_{12}(\theta_2)}{\alpha(\theta_2)}w_2 - h_{11}\tilde{\theta} - h_{12}\theta_2}{m_{11}(\theta_2)} \right) + \left( \frac{h_{12}m_{12}(x_2)}{m_{11}(x_2)\alpha(x_2)} - \frac{h_{22}}{\alpha(x_2)} \right) \frac{w_2}{\alpha(\theta_2)} \\ &= g(\theta, w_1) + \frac{\vartheta_1}{\alpha(\theta_2)}w_2. \end{aligned}$$

$$\text{Entonces tenemos que } \dot{w} = \begin{bmatrix} v_1 + \delta_1 \\ g(\theta, w_1) + \frac{\vartheta_0}{\alpha(\theta_2)} + \frac{\vartheta_1}{\alpha(\theta_2)}w_2 + \frac{\vartheta_\delta}{\alpha(\theta_2)} - \frac{\psi(x, \varpi)}{\alpha(\theta_2)} \end{bmatrix}. \quad \square$$

### APÉNDICE C. PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 3.2

Primero vamos a probar la factibilidad de la desigualdad matricial no lineal (10): *i*) Elija los parámetros positivos  $k_{o1}$ ,  $k_{o2}$ ,  $\gamma_1$  y  $\epsilon$ , esto asegura que  $A_1$  es una matriz de Hurwitz. *ii*) Encuentra una matriz  $P_1$  a partir de la desigualdad de Lyapunov  $\Pi_1 = P_1 A_1 + A_1^T P_1 + \gamma_1 \Gamma_1 \tilde{B}^T \tilde{B} + \epsilon I < 0$ . *iii*) Por complemento de Schur la desigualdad (10) es equivalente a  $-\gamma_1 \mu_{11}^4 + B^T P_1 \Pi_1^{-1} P_1 B < 0$ . *iv*) Para un valor suficientemente grande en  $\mu_{11}$ , la factibilidad de (10) está asegurada.

Para mostrar que (9) es un observador global de tiempo finito del sistema (8) analizamos la dinámica del error de estimación entre ellos, el cual es dado por:

$$(21) \quad \begin{cases} \dot{e}_{\theta_1} = \frac{e_{w_1} - k_{o1}\phi_{11}(e_{\theta_1})}{m_{11}(\theta_2)}, \\ \dot{e}_{w_1} = -\frac{k_{o2}}{m_{11}(\theta_2)}\phi_{12}(e_{\theta_1}) - \delta_1, \end{cases}$$

donde  $e_{\theta_1} = \hat{\theta}_1 - \theta_1$ ,  $e_{w_1} = \hat{w}_1 - w_1$ . Para el subsistema (21), considere  $\zeta := \begin{bmatrix} \phi_{11}(e_{\theta_1}) \\ e_{w_1} \end{bmatrix}$ ,

donde se tiene  $\dot{\zeta} = \frac{\phi'_{11}(e_{\theta_1})}{m_{11}(\theta_2)} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} -k_{o1} & 1 \\ -k_{o2} & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} \zeta + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \left( \frac{-\delta_1 m_{11}(\theta_2)}{\phi'_{11}(e_{\theta_1})} \right) \right)$  con  $e_{\theta_1} \neq 0$ . Definiendo

la función  $V_1(e_{\theta_1}, e_{w_1}) = \zeta^T P_1 \zeta$ , la derivada con respecto al tiempo se obtiene como

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{\phi'_{11}(e_{\theta_1})}{m_{11}(\theta_2)} \left[ \zeta^T (P_1 A_1 + A_1^T P_1) \zeta + 2\zeta^T P_1 B \left( \frac{-\delta_1 m_{11}(\theta_2)}{\phi'_{11}(e_{\theta_1})} \right) \right] \\ &= \frac{\phi'_{11}(e_{\theta_1})}{m_{11}(\theta_2)} X_1^T \begin{bmatrix} P_1 A_1 + A_1^T P_1 & \star \\ B^T P_1 & 0 \end{bmatrix} X_1, \end{aligned}$$

donde  $X_1 = \begin{bmatrix} \zeta & \frac{-\delta_1 m_{11}(\theta_2)}{\phi'_{11}(e_{\theta_1})} \end{bmatrix}^T$  y  $\phi'_{12}(e_{\theta_1}) = \phi'_{11}(e_{\theta_1}) \cdot \phi_{11}(e_{\theta_1})$ .

El término  $\frac{-\delta_1 m_{11}(\theta_2)}{\phi'_{11}(e_{\theta_1})}$  satisface una propiedad disipativa (18) de la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \left| \frac{-\delta_1 m_{11}(\theta_2)}{\phi'_{11}(e_{\theta_1})} \right|^2 &= \left| \frac{-\delta_1 m_{11}(\theta_2)}{\phi'_{11}(e_{\theta_1})\phi_{11}(e_{\theta_1})} \phi_{11}(e_{\theta_1}) \right|^2 \\ &= \left| \frac{-\delta_1 m_{11}(\theta_2)}{\phi_{12}(e_{\theta_1})} \phi_{11}(e_{\theta_1}) \right|^2 \\ &\leq \frac{4L_{\delta_1}^2 [m_{11}(\theta_2)]^2}{\mu_{11}^4} |\phi_{11}(e_{\theta_1})|^2, \end{aligned}$$

donde

$$(23) \quad \begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{-\delta_1 m_{11}(\theta_2)}{\phi'_{11}(e_{\theta_1})} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_1 \Gamma_1 \tilde{B}^T \tilde{B} & 0 \\ 0 & -\gamma_1 \mu_{11}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{-\delta_1 m_{11}(\theta_2)}{\phi'_{11}(e_{\theta_1})} \end{bmatrix} \geq 0,$$

se cumple para todo  $\gamma_1 > 0$ , donde  $\tilde{B} = [1 \ 0]^T$  y  $\Gamma_1 = 4L_{\delta_1}^2 [m_{11}(\theta_2)]^2$ . Usando (23) en (22) se obtiene

$$(24) \quad \begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq \frac{\phi'_{11}(e_{\theta_1})}{m_{11}(\theta_2)} X_1^T \begin{bmatrix} P_1 A_1 + A_1^T P_1 + \gamma_1 \Gamma_1 \tilde{B}^T \tilde{B} & \star \\ B^T P_1 & -\gamma_1 \mu_{11}^4 \end{bmatrix} X_1, \\ &\leq -\epsilon \frac{\phi'_{11}(e_{\theta_1})}{m_{11}(\theta_2)} \|\zeta\|^2 \leq -\frac{\epsilon}{|P_1|_M} \phi'_{11}(e_{\theta_1}) \zeta^T P_1 \zeta, \\ &= -\frac{\epsilon \mu_{11}}{2|P_1|_M |e_{\theta_1}|^{1/2}} V_1 - \frac{\epsilon \mu_{12}}{|P_1|_M} V_1, \\ &\leq -\frac{\epsilon \mu_{11}^2 |P_1|_M^{1/2}}{2|P_1|_M} V_1^{1/2} - \frac{\epsilon \mu_{12}}{|P_1|_M} V_1. \end{aligned}$$

Téngase en cuenta que las trayectorias del sistema del error de estimación no pueden permanecer en el conjunto  $S = \{(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} | e_1 = 0\}$ . Esto significa que  $V_1$  es una función continuamente decreciente a través del Teorema de Lyapunov para inclusiones diferenciales [[7]; Prop. 14.1 pág. 205] (que no requiere diferenciabilidad de la función de Lyapunov). Dado que la solución de la ecuación diferencial  $\dot{v} = -\gamma_1 v^{1/2} - \gamma_2 v$  viene dada por  $v(t) = \exp(-\gamma_2 t) \left[ v_0^{1/2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (1 - \exp(\frac{\gamma_2}{2} t)) \right]$ , podemos concluir que el punto de equilibrio  $(e_1, e_2) = 0$  se alcanza en un tiempo finito a partir de cada condición inicial.  $\square$

#### APÉNDICE D. PRUEBA DEL TEOREMA 3.1

Para analizar la dinámica del error de estimación (25) entre los sistemas (7) y (11), se puede considerar como dos subsistemas (25a) y (25b)

$$(25a) \quad \dot{e}_{\theta_1} = \frac{e_{w_1} - k_{o1}\phi_{11}(e_{\theta_1})}{m_{11}(\theta_2)},$$

$$\dot{e}_{w_1} = -\frac{k_{o2}}{m_{11}(\theta_2)}\phi_{12}(\theta_1) - \delta_1,$$

$$(25b) \quad \dot{e}_{\theta_2} = \frac{e_{w_2} - l_{o1}\phi_{21}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)},$$

$$\dot{e}_{w_2} = g(\theta, \hat{w}_1) - g(\theta, w_1) + \frac{\vartheta_1}{\alpha(\theta_2)}e_2 - \frac{\vartheta_\delta}{\alpha(\theta_2)} + \frac{\Psi}{\alpha(\theta_2)} - \frac{l_{o2}\phi_{22}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)},$$

donde  $e_{\theta_1} = \hat{\theta}_1 - \theta_1$ ,  $e_{w_1} = \hat{w}_1 - w_1$ ,  $e_{\theta_2} = \hat{\theta}_2 - \theta_2$ ,  $e_{w_2} = \hat{w}_2 - w_2$ ,  $\Psi := \psi(x, \varpi) - \psi(x, \hat{\varpi} + \Upsilon_{\theta_2} k_{o1} \phi_1(e_{\theta}))$ . Por la Proposición 3.2 el error de estimación del subsistema (25a) converge a cero en tiempo finito. El término  $g(\theta, \hat{w}_1) - g(\theta, w_1)$  puede omitirse del análisis de error de estimación (25b), ya que satisface  $|g(\theta, \hat{w}_1) - g(\theta, w_1)| \leq h(\theta, w_1, \hat{w}_1)|e_{w_1}|$  para alguna función continua positiva  $h(\theta, w_1, \hat{w}_1)$ .

Para el subsistema (25b), defina  $\eta := \begin{bmatrix} \phi_{21}(e_{\theta_2}) \\ e_{w_2} \end{bmatrix}$  y la derivada temporal de  $\eta$  se da como

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \frac{\phi'_{21}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)} \underbrace{\begin{bmatrix} -l_{o1} & 1 \\ -l_{o2} & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} \eta + B \left( \frac{\vartheta_1}{\alpha(\theta_2)} e_{w_2} - \frac{\vartheta_\delta}{\alpha(\theta_2)} + \frac{\Psi}{\alpha(\theta_2)} \right), \\ &= \frac{\phi'_{21}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)} \left\{ A_2 \eta + B \left( \frac{\vartheta_1}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} e_{w_2} - \frac{\vartheta_\delta}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} + \frac{\Psi}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} \right) \right\}. \end{aligned}$$

$$(26) \quad \dot{V}_2 = \frac{\phi'_{21}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)} \left[ \eta^T (P_2 A_2 + A_2^T P_2) \eta + 2\zeta^T P_2 B \left( \frac{\vartheta_1}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} e_{w_2} - \frac{\vartheta_\delta}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} + \frac{\Psi}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} \right) \right],$$

$$= \frac{\phi'_{21}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)} X_2^T \begin{bmatrix} P_2 A_2 + A_2^T P_2 & \star & \star & \star \\ B^T P_2 & 0 & \star & \star \\ B^T P_2 & 0 & 0 & \star \\ B^T P_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_2,$$

donde  $X_2 = \left[ \zeta \quad -\frac{\vartheta_\delta}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} \quad \frac{\vartheta_1}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} e_{w_2} \quad \frac{\Psi}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} \right]^T$ .

Para  $-\frac{\vartheta_\delta}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} = -\frac{m_{11}(\theta_2)\delta_2 - m_{12}(\theta_2)\delta_1}{m_{11}(\theta_2)\phi'_{21}(e_{\theta_2})}$  se satisface la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \left| -\frac{\vartheta_\delta}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} \right|^2 &= \left| -\frac{m_{11}(\theta_2)\delta_2 - m_{12}(\theta_2)\delta_1}{m_{11}(\theta_2)\phi'_{21}(e_{\theta_2})\phi_{21}(\theta_2)} \phi_{21}(\theta_2) \right|^2 \\ &= \left| -\frac{m_{11}(\theta_2)\delta_2 - m_{12}(\theta_2)\delta_1}{m_{11}(\theta_2)\phi_{22}(\theta_2)} \phi_{21}(\theta_2) \right|^2 \\ &\leq \frac{\Gamma_2}{\mu_{21}^4} |\phi_{21}(e_{\theta_1})|^2, \end{aligned}$$

con  $\Gamma_2 = 4 \left[ \left| \frac{m_{11}(\theta_2)\delta_2 - m_{12}(\theta_2)\delta_1}{m_{11}(\theta_2)} \right| \right]^2$ , entonces

$$(27) \quad \begin{bmatrix} \eta \\ -\frac{\vartheta_\delta}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_2 \Gamma_2 \tilde{B}^T \tilde{B} & 0 \\ 0 & -\gamma_2 \mu_{21}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ -\frac{\vartheta_\delta}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} \end{bmatrix} \geq 0,$$

es satisfecha para todo  $\gamma_2 > 0$ , donde  $\tilde{B} = [1 \ 0]^T$ .

Para  $\frac{\vartheta_1}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} e_{w_2}$  se satisface la siguiente desigualdad

$$\left| \frac{\vartheta_1}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} e_{w_2} \right|^2 \leq \frac{\Gamma_3}{\mu_{22}^2} \eta^T B B^T \eta,$$

donde  $\Gamma_3 = 4[\vartheta_1]^2$ . Lo que implica la siguiente propiedad de disipatividad

$$(28) \quad \begin{bmatrix} \eta \\ \frac{\vartheta_1}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} e_{w_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_3 \Gamma_3 B B^T & 0 \\ 0 & -\gamma_3 \mu_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \frac{\vartheta_1}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})} e_{w_2} \end{bmatrix} \geq 0,$$

para todo  $\gamma_3 > 0$ .

Para el término  $\frac{\Psi}{\phi'_{21}(e_{\theta_2})}$ , de la condición P-4 y (19) con  $h = \Upsilon_{\theta_2}(e_w + k_l \phi_1(e_\theta))$ , se obtiene

$$\left( \frac{\Psi}{\phi'_{21}} \right)^2 \leq \frac{\Gamma_4}{\mu_{22}^2} \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E_k^T E_k & 0 \\ 0 & E_l^T E_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix}$$

de donde la siguiente desigualdad

$$(29) \quad \zeta^T \gamma_4 \Gamma_4 \tilde{\Delta}_1 \zeta + \begin{bmatrix} \eta \\ \frac{\Psi}{\phi'_{21}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_4 \Gamma_4 \tilde{\Delta}_2 & 0 \\ 0 & -\gamma_4 \mu_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \frac{\Psi}{\phi'_{21}} \end{bmatrix} \geq 0,$$

se cumple para todo  $\gamma_5 > 0$ , donde  $\tilde{\Delta}_1 = E_k^T E_k$ ,  $\tilde{\Delta}_2 = E_l^T E_l$ ,  $E_k = [k_{o3} \ 1]$ ,  $E_l = [l_{o3} \ 1]$ ,  $\Gamma_4 = 4\Gamma_{R0}^2 [|\Upsilon_{\theta_2}^T \Upsilon_{\theta_2}|_M]$ , y  $\Gamma_{R0}$  de (19) en el Lema A.1. Tenga en cuenta que el primer término en (29) se puede omitir debido a la  $\eta \rightarrow 0$  en tiempo finito, Proposición 3.2.

Usando (27), (28), (29) en (26) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &\leq \frac{\phi'_{21}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)} X_2^T \begin{bmatrix} \mathcal{H} & \star & \star & \star \\ B^T P_2 & -\gamma_2 \mu_{21}^4 & \star & \star \\ B^T P_2 & 0 & -\gamma_3 \mu_{22}^2 & \star \\ B^T P_2 & 0 & 0 & -\gamma_4 \mu_{m2}^2 \end{bmatrix} X_2 \\
&\leq -\epsilon \frac{\phi'_{21}(e_{\theta_2})}{\alpha(\theta_2)} \|\eta\|^2 \leq -\frac{\epsilon}{|P_2|_M} \phi'_{21}(e_{\theta_2}) \eta^T P_2 \eta, \\
&= -\frac{\epsilon \mu_{21}}{2|P_2|_M |e_{\theta_2}|^{1/2}} V_2 - \frac{\epsilon \mu_{22}}{|P_2|_M} V_2, \\
(30) \quad &\leq -\frac{\epsilon \mu_{21}^2 |P_2|_M^{1/2}}{2|P_2|_M} V_2^{1/2} - \frac{\epsilon \mu_{22}}{|P_2|_M} V_2,
\end{aligned}$$

donde  $\mathcal{H} = P_2 A_2 + A_2^T P_2 + \gamma_2 \Gamma_2 \tilde{B}^T \tilde{B} + \gamma_3 \Gamma_3 B B^T + \gamma_4 \Gamma_4 \tilde{\Delta}_2$ . Tenga en cuenta que las trayectorias de la dinámica del error de estimación no pueden permanecer en el conjunto  $S = \{(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} | e_1 = 0\}$ . Esto significa que  $V_1$  es una función continuamente decreciente y que utiliza el Teorema de Lyapunov para inclusiones diferenciales [[7]; Prop. 14.1 pág. 205] (que no requiere diferenciabilidad de la función de Lyapunov). Dado que la solución de la ecuación diferencial  $\dot{v} = -\gamma_1 v^{1/2} - \gamma_2 v$  viene dada por  $v(t) = \exp(-\gamma_2 t) \left[ v_0^{1/2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (1 - \exp(\frac{\gamma_2}{2} t)) \right]$ , podemos concluir que el punto de equilibrio  $(e_1, e_2) = 0$  se alcanza en un tiempo finito a partir de cada condición inicial.  $\square$

## REFERENCIAS

- [1] W. Apaza-Perez, J. Moreno, and L. Fridman. Dissipative approach to sliding mode observers design for uncertain mechanical systems. *Automatica*, 87:330–336, 2018.
- [2] W. Apaza-Perez, J. Moreno, and L. Fridman. Global sliding mode observers for some uncertain mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(3):1348–1355, 2020.
- [3] A. Astolfi, R. Ortega, and A. Venkatraman. A globally exponentially convergent immersion and invariance speed observer for mechanical systems with non-holonomic constraints. *Automatica*, 46(1):182–189, 2010.
- [4] J. Barbot and T. Floquet. Iterative higher order sliding mode observer for nonlinear systems with unknown inputs. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms*, 17:1019–1033, 2010.
- [5] G. Besançon. Global output feedback tracking control for a class of Lagrangian systems. *Automatica*, 36:1915–1921, 2000.
- [6] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant. Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *Automatic Control, IEEE Trans. on*, 50:1785–1789, 2005.
- [7] K. Deimling. *Multivalued Differential Equations*. Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [8] D. Efimov, A. Zolghadri, J. Cieslak, and D. Henry. Input estimation via sliding-mode differentiation for early ofc detection. *8th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, 2:1143–1148, 2012.
- [9] L. Fridman, Y. Shtessel, C. Edwards, and X. Yan. Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18:399–412, 2008.
- [10] I. Hassanzadeh and S. Mobayen. Controller design for rotary inverted pendulum system using evolutionary algorithms. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011:1–17, 2011.

- [11] M. Hautus. Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications*, 50:353–368, 1983.
- [12] INTECO. Pendulum-cart system user’s manual. 2008.
- [13] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34:379–384, 1998.
- [14] M. Mabrouk, F. Mazenc, and J.-C. Vivalda. On global observers for some mechanical systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 37(21):675–680, 2004. 2nd IFAC Symposium on System Structure and Control, Oaxaca, Mexico, December 8-10, 2004.
- [15] J. Moreno. A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm. In *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, 6th Int. Conf. on*, pages 1–6. Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, 6th Int. Conf. on, 2009.
- [16] J. A. Moreno. Approximate observer error linearization by dissipativity methods. In T. Meurer, K. Graichen, and E. D. Gilles, editors, *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems*, volume 322, pages 35–51. Springer-Verlag, Berlin, LNCIS edition, 2005.
- [17] T. Ortega, R. Villafuerte, C. Vazquez, and L. Freidovich. Performance without tweaking differentiators via a pr controller: Furuta pendulum case study. In *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 3777–3782. 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2016.
- [18] A. Pisano and E. Usai. Sliding mode control: A survey with applications in math. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81:954–979, 2011.
- [19] E. Rocha-Cózatl and J. A. Moreno. Dissipativity and design of unknown input observers for nonlinear systems. *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pages 615–602, 2004.
- [20] E. Rocha-Cózatl and J. A. Moreno. Dissipative design of unknown input observers for systems with sector nonlinearities. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21:1623–1644, 2011.
- [21] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar. *Robot modeling and control*, volume 3. wiley New York, 2006.
- [22] Ø. N. Starnes, O. M. Aamo, and G. Kaasa. A constructive speed observer design for general Euler–Lagrange systems. *Automatica*, 47(10):2233 – 2238, 2011.
- [23] B. Xian, M. S. de Queiroz, D. M. Dawson, and M. McIntyre. A discontinuous output feedback controller and velocity observer for nonlinear mechanical systems. *Automatica*, pages 695–700, 2004.

APAZA-PEREZ, Carrera de Matemática, Universidad Mayor de San Andrés.

Av. Villazón 1995 – Monoblock Central UMSA Planta Baja del Edificio Viejo, La Paz – Bolivia

*E-mail:* waapaza@umsa.bo

MORENO, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México – 04510, México

*E-mail:* jmorenop@iingen.unam.mx

FRIDMAN, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México – 04510, México

*E-mail:* lfridman@unam.mx